On donne le polynôme $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 4x - 4$. Déterminer toutes les racines de ce polynôme sachant qu'une d'elles vaut 2 et que le produit de deux racines vaut -1.

Notons a, b, c et d les quatre racines de ce polynôme. Ainsi, on a $a = 2$ et $bc = -1$ ou encore $c = \dfrac{-1}{b}$. Le polynôme peut s'écrire

$$3x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 4x - 4 = 3(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = 3(x-2)(x-b)(x+\tfrac{1}{b})(x-d)$$

Le terme indépendant de l'expression de droite vaut $-6d$. On a alors $-6d = -4$ donc $\boxed{d = \frac{2}{3}}$. On peut déjà écrire

$$3x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 4x - 4 = 3(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = 3(x-2)(x-b)(x+\tfrac{1}{b})(x-\tfrac{2}{3})$$

Dans la partie de droite, le terme en x^3 est $-3(b - \frac{1}{b}) - 8$. On doit alors avoir

$$-3(b - \tfrac{1}{b}) - 8 = -11 \iff b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Les deux racines sont opposées et inverses l'une de l'autre (l'une correspondant à b et l'autre à c).

Ainsi : $\boxed{a = 2,\ b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ c = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\ ;\ d = \frac{2}{3}}$.