Résoudre, dans les nombres réels,

$$\left(2x+\sqrt{x}\right)^4+4\left(2x+\sqrt{x}\right)^2\leqslant 5$$

Nous devons imposer $\boxed{x \geqslant 0}$ comme condition d'existence.
En posant $t=\left(2x+\sqrt{x}\right)^2$ (nous avons évidemment $t\geqslant 0$), l'équation devient alors une inéquation du deuxième degré

$$t^2+4t-5\leqslant 0 \iff -5\leqslant t\leqslant 1$$

Or, puisque $t\geqslant 0$, on doit avoir

$$0\leqslant t\leqslant 1 \quad \text{et donc} \quad 0\leqslant \left(2x+\sqrt{x}\right)^2\leqslant 1$$

c'est-à-dire

$$-1\leqslant 2x+\sqrt{x}\leqslant 1$$

Et à nouveau, puisque $x\geqslant 0$, il est évident que $2x+\sqrt{x}\geqslant 0$. *In fine*, on doit avoir

$$0\leqslant 2x+\sqrt{x}\leqslant 1$$

En posant $u=\sqrt{x}$, les dernières inégalités s'écrivent

$$0\leqslant 2u^2+u\leqslant 1$$

c'est-à-dire $0\leqslant u\leqslant \frac{1}{2}$.
Finalement, on doit avoir, puisque $u=\sqrt{x}$,

$$0\leqslant x\leqslant \frac{1}{4}$$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{Sol : \left[0;\frac{1}{4}\right]}$.