

Résoudre, dans les nombres réels, le système d'équations que voici :

$$\begin{cases} 2^x (2^{1+x} + 1) + 4^y (2^{1-x} - 1) - 3 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

De la seconde équation, on extrait $y = \frac{3x+1}{2}$ que l'on injecte dans la première équation. De plus, $4^y = 4^{\frac{3x+1}{2}} = 2^{3x+1}$. La première équation devient alors

$$2^x (2^{1+x} + 1) + 4^y (2^{1-x} - 1) - 3 = 0 \iff 2^x (2^{1+x} + 1) + 2^{3x+1} (2^{1-x} - 1) - 3 = 0$$

En posant $u = 2^x$, cette dernière devient

$$\begin{aligned} u(2u + 1) + 2u^3 \left(\frac{2}{u} - 1 \right) - 3 &= 0 \iff 2u^3 - 6u^2 - u + 3 = 0 \\ &\iff (2u^3 - 6u^2) - (u - 3) = 0 \\ &\iff 2u^2(u - 3)(u - 3) = 0 \\ &\iff (u - 3)(2u^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $u = 3$ ou $u = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

■ Si $2^x = 3$, alors $x = \log_2 3$ et donc $y = \frac{3 \log_2 3 + 1}{2}$;

■ si $2^x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, ce qui est impossible ;

■ si $2^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $x = \frac{-1}{2}$ et $y = \frac{-1}{4}$.