Déterminer le coefficient du terme en x^4 du développement de $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^6-\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$.

Déterminons le terme en x^4 dans chacun des termes $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^6$ et $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$.

- Dans $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^6$, le terme en x^4 est égal $C_6^j(x^2)^j\left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-j} = C_6^j x^{4j-12}$. Pour obtenir le terme en x^4, on doit avoir $4j-12=4$, donc $j=4$. Ainsi, on a $C_6^j x^{4j-12}=C_6^4x^4=15x^4$.
- Dans $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$, le terme en x^4 est égal $C_6^k(x)^k\left(\frac{1}{x}\right)^{6-k} = C_6^k x^{2k-6}$. Pour obtenir le terme en x^4, on doit avoir $2k-6=4$, donc $k=5$. Ainsi, on a $C_6^k x^{2k-6}=C_6^5x^4=6x^4$.

Ainsi le terme en x^4 est égal à $15x^5-6x^4=\boxed{9x^4}$.

NB : on peut vérifier que le développement de l'expression est égal à

$$x^{12}+6x^8-x^6+9x^4-15x^2-\frac{15}{x^2}+\frac{9}{x^4}-\frac{1}{x^6}+\frac{6}{x^8}+\frac{1}{x^{12}}$$