Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6}\sqrt{xy} \end{cases}$$

Posons $a = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{y}$. Ainsi, on doit avoir $a \geq 0$ et $b \geq 0$. Le système peut alors se réécrire

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 12 \\ a + b = \frac{5}{6}ab \end{cases}$$

Or ; $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, donc $(a + b)^2 = 12 + \frac{12}{5}(a + b)$. $a + b$ sont alors les solutions de l'équation $X^2 - \frac{12}{5}X - 13 = 0$ c'est-à-dire $X = 5$ ou $X = \frac{-13}{5}$. Or, $a + b \geq 0$, donc $X \geq 0$. Seule la solution $X = 5$ est acceptable. On a alors

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a + b = \frac{5}{6}ab \end{cases}$$

Donc $a = 5 - b$. En injectant cela dans la deuxième équation, il vient $b^2 = 13 - (5 - b)^2$ ou encore $(b - 2)(b - 3) = 0$. Si $b = 2$, alors $a = 3$ et si $b = 3$, alors $a = 2$ (les solutions sont évidemment symétriques puisque le système initial l'est).

Donc $(a, b) = (\sqrt{x}; \sqrt{y}) = (2; 3)$ ou $(a, b) = (\sqrt{x}; \sqrt{y}) = (3; 2)$; c'est-à-dire $\boxed{(x; y) = (4; 9)}$ ou $\boxed{(x; y) = (9; 4)}$.