

On donne les matrices réelles

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 3d \end{bmatrix}$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des nombres réels avec  $d > c > 0$ . On demande de déterminer  $a, b, c$  et  $d$  sachant que

$$BA^{-1}X = C \quad 9a^2d^2 + b^2c^2 - 6abcd = 36 \quad 2\log_2 c + \log_2 d = 4$$

$$(1) \text{ Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ alors } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \quad BA^{-1}X = C \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\iff a = 1 \text{ et } b = 3$$

$$(3) \text{ Si } 9a^2d^2 + b^2c^2 - 6abcd = 36, \text{ alors } (3ad - bc)^2 = 36 \iff (3d - 3c)^2 = 36 \text{ ou encore } (d - c)^2 = 4. \text{ On en déduit } d - c = 2 \text{ (car } d > c > 0).$$

$$(4) \quad 2\log_2 c + \log_2 d = 4 \iff \log_2 c^2d = \log_2 16 \iff c^2d = 16.$$

$$(5) \text{ En combinant les relations } d - c = 2 \text{ et } c^2d = 16, \text{ on a}$$

$$\begin{cases} d = 2 + c \\ c^2(2 + c) = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 2 + c \\ c^3 + 2c^2 - 16 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 2 + c \\ (c - 2)(c^2 + 4c + 8) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

Finalement  $\boxed{a = 1, b = 3, c = 2 \text{ et } d = 4}.$