On donne les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ a & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

où a est un paramètre réel.

On demande de déterminer toutes les valeurs de a pour lesquelles on a $AV = W$ et de donner pour chaque valeur trouvée de a la valeur correspondante de $\det A$.

En calculant le produit matriciel AV, on a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ a & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -a - 3a^2 + a^3 \end{bmatrix}$$

On doit avoir $-a - 3a^2 + a^3 = -3$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a^3 - 3a^2 - a + 3 = 0 &\iff a^2(a-3) - (a-3) = 0 \\ &\iff (a-3)(a-1)(a+1) = 0 \\ &\iff a = -1 \text{ ou } a = 1 \text{ ou } a = 3 \end{aligned}$$

- Si $a = 1$, la matrice A devient

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  dont le déterminant est évidemment nul (les lignes 1 et 3 étant identiques).

- Si $a = -1$, la matrice A devient

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

  Le déterminant de cette dernière matrice est

$$\det A_{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 = -4$$

- Si $a = 3$, la matrice A devient

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de cette dernière matrice est

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 12$$