

Résoudre et discuter les équations et inéquations suivantes en fonction du paramètre réel m si nécessaire :

$$(1) \frac{3m^2x - 6}{12} + \frac{1 - 2mx}{2} < m - 7$$

$$(2) \frac{2(x+1)}{x-2} \geq \frac{x+3}{x-1}$$

$$(3) \left(m + \frac{1}{m}\right)(x+1) - 2m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)x$$

$$(4) m(x-4) - \frac{1}{4} = x^2 + x - m$$

(1) L'équation se transforme immédiatement en $\left(\frac{m^2}{4} - m\right)x < m - 7$. On doit donc étudier le signe du coefficient de x : $\frac{m^2}{4} - m$; ses racines sont $m = 0$ et $m = 4$.

m	0	4
$\frac{m^2}{4} - m$	+	+
	-	+

- si $m < 0$ ou $m > 4$, alors $x < \frac{4(m-7)}{m(m-4)}$;
- si $0 < m < 4$, alors $x > \frac{4(m-7)}{m(m-4)}$;
- si $m = 0$, l'équation se réécrit $0x < -7$, ce qui est impossible;
- si $m = 4$, l'équation se réécrit $0x < -3$, ce qui est impossible.

(2) Nous devons avoir $x \neq 1$ et $x \neq 2$. Après transformation, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{2(x+1)}{x-2} \geq \frac{x+3}{x-1} &\iff \frac{2(x+1)}{x-2} - \frac{x+3}{x-1} \geq 0 \\ &\iff \frac{2(x+1)(x-1) - (x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} \geq 0 \\ &\iff \frac{x^2 - x + 4}{(x-2)(x-1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Le numérateur n'admet aucune racine.

x	1	2
$x^2 - x + 4$	+	+
$(x-1)(x-2)$	+	-
$\frac{x^2 - x + 4}{(x-2)(x-1)}$	+	+

On a donc $Sol =] - \infty; 1[\cup] 2; +\infty[$.

(3) L'équation peut se réécrire $(m-1)x = m - \frac{1}{m} = \frac{(m-1)(m+1)}{m}$ (avec $m \neq 0$).

● si $m \neq 1$, alors $x = \frac{m+1}{m}$;

● si $m = 1$, l'équation se réduit à $0x = 0$, l'équation est alors **indéterminée**.

(4) L'équation peut se réécrire $x^2 + (1-m)x + 3m + \frac{1}{4}$, $\Delta = (1-m)^2 - 4 \cdot (3m + \frac{1}{4}) = m \cdot (m-14)$.

m	0	14
Δ	+	-
	0	0
		+

● si $m < 0$ ou $m > 14$, alors l'équation admet deux racines, alors $x_{1,2} = \frac{m-1 \pm \sqrt{m(m-14)}}{2}$;

● si $0 < m < 14$, l'équation n'admet pas de racine réelle ;

● si $m = 0$, l'équation devient $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ donc l'unique racine est $x = -\frac{1}{2}$;

● si $m = 14$, l'équation devient $x^2 - 13x + \frac{169}{4} = 0$ donc l'unique racine est $x = \frac{13}{2}$.