(1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 - 5x + \sqrt{x^2 - 5x + 22} + 2 = 0$.

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{5x - 4} - \sqrt{x} = \sqrt{x + 11}$.

(3) Déterminer a et b pour que $P(x) = x^3 + ax + b$ soit divisible par $x^2 - 3x + 2$. Calculer également le quotient.

---

(1) Il n'y a pas de condition d'existence à poser sur le contenu de la racine carrée puisque $\Delta = 25 - 4 \times 22 < 0$.

Par contre, l'équation se réécrivant $\sqrt{x^2 - 5x + 22} = -x^2 + 5x - 2$; on doit imposer une condition d'élévation au carré : $-x^2 + 5x - 2 \geqslant 0$ c'est-à-dire $\dfrac{5 - \sqrt{17}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}$.

En élevant les deux membres au carré, on a $x^2 - 5x + 22 = x^4 - 10x^3 + 29x^2 - 20x + 4$ ou encore $x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 15x - 18 = 0$ qui se factorise aisément, grâce à la méthode d'Horner en $(x - 2)(x - 3)(x^2 - 5x - 3) = 0$ dont les racines sont $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ et $x_{3,4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Cependant, ces deux dernières ne satisfont pas les conditions d'élévation au carré.

Ainsi $\boxed{Sol = \left\{2; 3\right\}}$.

(2) L'équation se réécrit $\sqrt{5x - 4} = \sqrt{x} + \sqrt{x + 11}$, il n'y a donc pas de condition d'élévation au carré. Les conditions d'existence sont $x \geqslant \frac{4}{5}$, $x \geqslant 0$ et $x \geqslant -11$. Finalement, nous devons imposer $\boxed{x \geqslant \frac{4}{5}}$.

En élevant les deux membres au carré, on a $5x - 4 = x + 11 + x + 2\sqrt{x(x + 11)}$ ou $3x - 15 = 2\sqrt{x(x + 11)}$, pour laquelle nous devons imposer $\boxed{x \geqslant 5}$.

En élevant à nouveau les deux membres au carré, nous avons $9x^2 - 90x + 225 = 4x^2 + 44x$ ou encore $5x^2 - 134x + 225 = 0$ donc les racines sont $x_1 = 25$ et $x_2 = \frac{9}{5}$. Seule la première racine convient.

Ainsi $\boxed{Sol = \left\{25\right\}}$.

(3) Puisque $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, on doit avoir $P(1) = P(2) = 0$.

$$\begin{cases} P(1) = 0 = 1 + a + b \\ P(2) = 0 = 8 + 2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -7 \\ b = 6 \end{cases}$$

donc $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Le quotient est $Q(x) = x + 3$ (Horner).