$\boxed{\text{Question 3)a)}}$

Déterminer le domaine de définition de la fonction h définie par

$$h(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - x - 2}}$$

La condition d'existence est $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - x - 2} \geqslant 0$.

Les racines de numérateur sont -3 et 5, tandis que celles du dénominateur sont -1 et 2.

On dresse le tableau de signe de la fraction $Q(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - x - 2}$.

x		-3		-1		2		5	
$x^2 - 2x - 15$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2 - x - 2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$Q(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Dès lors $\boxed{\text{dom} f =]-\infty;-3] \cup]-1;2[\cup [5;+\infty[}$.

$\boxed{\text{Question 3)b)}}$

Donner la partie réelle et la partie imaginaire de $\dfrac{2+5i}{1-i}$.

On a

$$\frac{2+5i}{1-i} = \frac{2+5i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+5i+2i+5i^2}{2} = \frac{-3+7i}{2}$$

La partie réelle est donc égale à $\dfrac{-3}{2}$, tandis que la partie imaginaire est égale à $\dfrac{7}{2}$.

Question 3)c)

Soient les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = -1 + i$. Déterminer le module et l'argument de z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.

On a

- $|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$ et $\arg(z_1) = \frac{-\pi}{6}$ (car l'affixe de z_1 est dans le quatrième quadrant). On peut donc écrire z_1 sous forme trigonométrique $z_1 = 2 \text{ cis}\frac{-\pi}{6}$.
- $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $\arg(z_2) = \frac{3\pi}{4}$ (car l'affixe de z_2 est dans le deuxième quadrant). On peut donc écrire z_2 sous forme trigonométrique $z_2 = \sqrt{2} \text{ cis}\frac{3\pi}{4}$.
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \text{ cis}\frac{-\pi}{6}}{\sqrt{2} \text{ cis}\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2} \text{ cis}\frac{-11\pi}{12}$. Ainsi $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2}$ et $\arg \frac{z_1}{z_2} = \frac{-11\pi}{12}$.

$\boxed{\text{Question 3)d)}}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$$

où $|z|$ est le module de z.

Soit $z = a + bi$. On a alors $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ et $|z|^2 = a^2 + b^2$. L'équation se transforme alors en

$$4(a^2 - b^2 + 2abi) + 8(a^2 + b^2) - 3 = 0 \iff (12a^2 + 4b^2 - 3) + 8abi = 0$$

L'équation se réduit alors à

$$\begin{cases} ab = 0 \\ 12a^2 + 4b^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Si $a = 0$, alors $4b^2 - 3 = 0$, donc $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, et si $b = 0$, $12a^2 - 3 = 0$, donc $a = \pm\frac{1}{2}$.

Finalement $\boxed{Sol : \left\{\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{-\sqrt{3}}{2}i\right\}}$.