Soit m, un paramètre réel négatif. Résoudre et discuter, dans les réels, l'inéquation suivante :

$$\frac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^2 - mx + 4} < 0$$

Racine du numérateur : il s'agit d'une équation bicarrée que l'on résout en 2 temps

a) On pose $y = x^2$, l'équation devient $y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

b) On résout ensuite $y = x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{N1,N2} = \pm\sqrt{2}$

c) Le numérateur est donc positif sauf aux racines où il s'annule

Racine du dénominateur :

a) Si $Si\ m \in]-\infty; -4]$ $(énoncé : \ on\ ne\ garde\ que\ m < 0), x_{D1,D2} \frac{m \pm \sqrt{m^2-16}}{2}$

b) Si $m \in [-4; 0]$, il y a 0 ou une racine, le signe du dénominateur étant positif ou nul, l'inéquation n'a aucune solution $S = \emptyset$

Pour réaliser le tableau de signes, il est nécessaire de comprendre comment sont positionnées les racines entre-elles

$$\frac{m - \sqrt{m^2-16}}{2} < -\sqrt{2} \Leftrightarrow m - \sqrt{m^2-16} < -2\sqrt{2} \Leftrightarrow m + 2\sqrt{2} < \sqrt{m^2-16} \Leftrightarrow m + 2\sqrt{2} < \sqrt{m^2-16}$$

Vu (**), ceci est toujours vrai donc $x_{D1} < x_{N1}$

$$\frac{m + \sqrt{m^2-16}}{2} < -\sqrt{2}$$

$$\sqrt{m^2-16} < -2\sqrt{2} - m$$

Si $\sqrt{m^2-16} < |-2\sqrt{2} - m|$, alors $m > -3\sqrt{2}$

$Si \sqrt{m^2-16} > |-2\sqrt{2} - m|, \ alors\ m < -3\sqrt{2}\ mais\ ceci\ contredit\ l'hyptothèse, donc\ sol°\ à\ rejeter$

Donc

si $m > -3\sqrt{2}$, alors $x_{D2} > x_{N1}$

si $m < -3\sqrt{2}$, alors $x_{D2} < x_{N1}$

si $m = -3\sqrt{2}$, alors $x_{D2} = x_{N1}$

$$\frac{m + \sqrt{m^2-16}}{2} < \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{m^2-16} < 2\sqrt{2} - m \Leftrightarrow 3\sqrt{2} > m$$

Vu (**), ceci est toujours vrai, donc $x_{D2} < x_{N2}$

On a donc 3 tableaux de signes à réaliser :

$-3\sqrt{2} < \mathrm{m} < -4$

		x_{D1}		x_{D2}		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
N	+	+	+	+	+	0	+	0	+
D	+	0	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{N}{D}$	+	/	-	/	+	0	+	0	+

$\mathrm{m} = -3\sqrt{2}$

		x_{D1}		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
N	+	+	+	0	+	0	+
D	+	0	-	0	+	+	+
$\frac{N}{D}$	+	/	-	/	+	0	+

$\mathrm{m} < -3\sqrt{2}$

		x_{D1}		$-\sqrt{2}$		x_{D2}		$\sqrt{2}$	
N	+	+	+	0	+	+	+	0	+
D	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{N}{D}$	+	/	-	0	-	/	+	0	+

Solutions

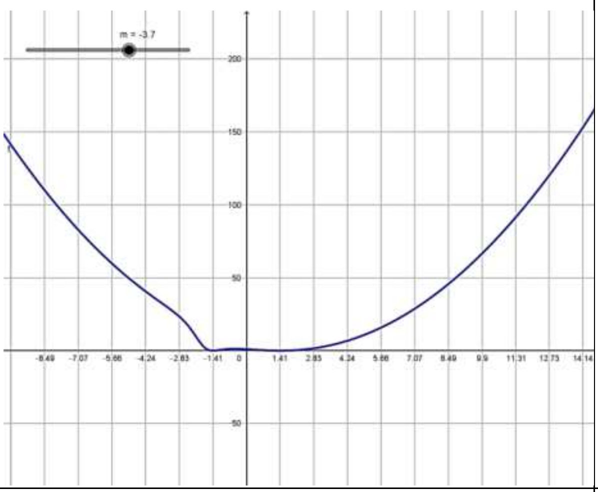
$Si\ -4 \leq m < 0 :$ $\quad S = \emptyset$

$Si\ -3\sqrt{2} < m < -4 :$ $\quad S = \left]\frac{m-\sqrt{m^2-16}}{2}; \frac{m+\sqrt{m^2-16}}{2}\right[$

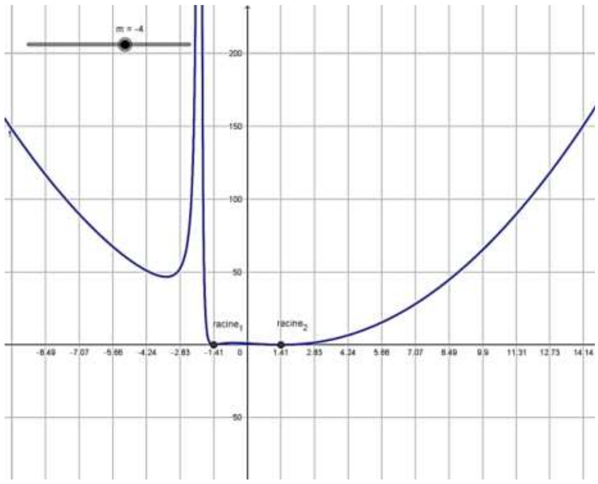
$Si\ m = -3\sqrt{2} :$ $\quad S =]-\sqrt{2}\,; -\sqrt{2}[$

$Si\ m < -3\sqrt{2} :$ $\quad S = \left]\frac{m-\sqrt{m^2-16}}{2}; \frac{m+\sqrt{m^2-16}}{2}\right[/\{-\sqrt{2}\}$

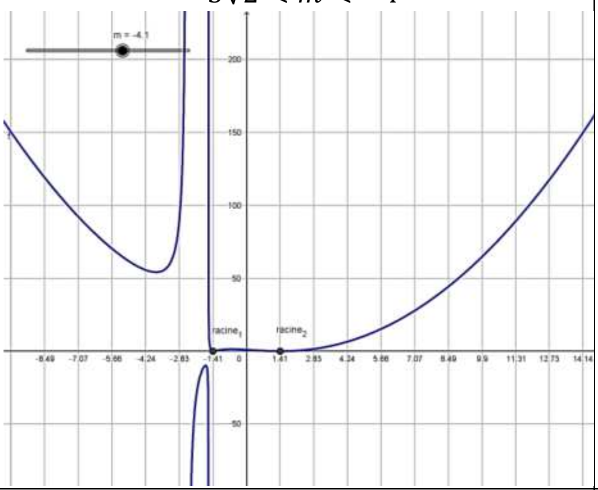
$-4 < m < 0$



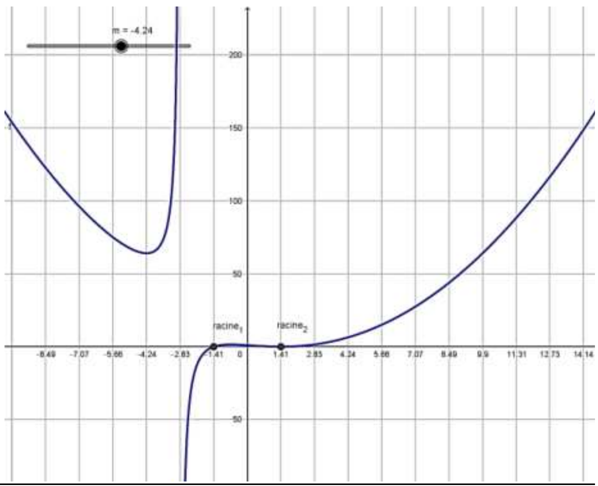
$m = 4$



$-3\sqrt{2} < m < -4$



$m = -3\sqrt{2}$



$m < -3\sqrt{2}$