Calculer $\int \left(1+\tan^2 x\right)\cdot\left(1+\tan^2\left(\tan x\right)\right)\cdot\left(1+\tan^2\left(\tan\left(\tan x\right)\right)\right)\ dx$ sachant que $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

---

En posant $t=\tan x$ et donc $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$, l'énoncé se réécrit

$$I = \int \frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2(\tan t)}\ dt$$

En posant à nouveau $u=\tan t$ et $du = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$, on a

$$I = \int \frac{1}{\cos^2 u}\ du = \tan u + k = \tan(\tan t) = \tan(\tan(\tan x)) + K$$

Finalement

$$\int \left(1+\tan^2 x\right)\cdot\left(1+\tan^2\left(\tan x\right)\right)\cdot\left(1+\tan^2\left(\tan\left(\tan x\right)\right)\right)\ dx = \boxed{\tan(\tan(\tan x)) + K}$$