

Calculer $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

Cet exercice est un grand classique de l'intégration de fonctions trigonométriques. En posant, $t = \tan \frac{x}{2}$, on $dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}$ et en se souvenant que $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$, il vient

$$\int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1 + t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt$$

$$= \int \frac{2}{t^2 + 2t + 1} dt$$

$$= \int \frac{2}{(t + 1)^2} dt$$

$$= \frac{-2}{t + 1} + K$$

$$= \boxed{\frac{-2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + K \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$$