Calculer $\displaystyle\int \ln^3 x \; dx$.

Rappelons au passage que $\displaystyle\int \ln x \; dx = x\cdot\Big(\ln x - 1\Big) + k$. Utilisons consécutivement deux fois la technique d'intégration par parties avec

(1) :

$u = \ln^3 x$	$u' = \dfrac{3\ln^2 x}{x}$
$v = x$	$v' = 1$

(2) :

$u = \ln^2 x$	$u' = \dfrac{2\ln x}{x}$
$v = x$	$v' = 1$

On a successivement :

$$\begin{aligned}
\int \ln^3 x \; dx &= x\cdot\ln^3 x - 3\int \ln^2 x \; dx \\
&= x\cdot\ln^3 x - 3\left(x\cdot\ln^2 x - 2\int \ln x \; dx\right) \\
&= x\cdot\ln^3 x - 3x\cdot\ln^2 x + 6\int \ln x \; dx \\
&= x\cdot\ln^3 x - 3x\cdot\ln^2 x + 6x\cdot\Big(\ln x - 1\Big) + K \\
&= \boxed{x\cdot\Big(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6\Big) + K \text{ avec } K \in \mathbb{R}}
\end{aligned}$$