

On donne $I_n = \int_1^e \ln^n x \, dx$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

(1) Calculer I_2 .

(2) Démontrer que $I_{n+1} + (n+1)I_n = e$.

(1) Rappelons, avant toutes choses que $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + K$. Pour calculer I_2 , utilisons également une intégration par parties :

$u = \ln^2 x$	$u' = \frac{2 \ln x}{x}$
$v = x$	$v' = 1$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_1^e \ln^2 x \, dx \\
 &= \left. x \ln^2 x \right|_1^e - 2 \int_1^e \ln x \, dx \\
 &= \left. x \ln^2 x - 2x(\ln x - 1) \right|_1^e \\
 &= (e \cdot \ln^2 e - 2e(\ln e - 1)) - (1 \cdot \ln^2 1 - 2 \cdot 1(\ln 1 - 1)) \\
 &= \boxed{e - 2}
 \end{aligned}$$

(2) Pour déterminer la relation entre I_{n+1} et I_n , utilisons également une intégration par parties.

Ainsi,

$u = \ln^{n+1} x$	$u' = \frac{(n+1) \ln^n x}{x}$
$v = x$	$v' = 1$

On a alors

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &= \int_1^e \ln^{n+1} x \, dx \\
 &= \left. x \ln^{n+1} x \right|_1^e - (n+1) \int_1^e \ln^n x \, dx \\
 &= e - (n+1) \int_1^e \ln^n x \, dx
 \end{aligned}$$

On a donc bien la relation $\boxed{I_{n+1} + (n+1)I_n = e}$.