Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x^3+1}\,dx$.

Remarque : $\ln 2 \approx 0,7$, $\ln 3 \approx 1,1$ et $\sqrt{3}\pi \approx 5,4$.

Calculons préalablement $\displaystyle\int \frac{3}{x^3+1}\,dx$. Puisque $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, décomposons $\dfrac{3}{x^3+1}$ en fractions partielles :

$$\frac{3}{x^3+1}=\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)}{(x+1)(x^2-x-1)}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=3 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{x^3+1}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\right)dx \\
&= \int \frac{1}{x+1}\,dx+\int \frac{-\frac{1}{2}(2x-1)}{x^2-x+1}\,dx+\int \frac{\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,dx \\
&= I_1+I_2+I_3
\end{aligned}$$

Les deux premières primitives se calculent aisément :

- $I_1=\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\,dx=\ln|x+1|+k$
- $I_2=\displaystyle\int \frac{-\frac{1}{2}(2x-1)}{x^2-x+1}\,dx=-\frac{1}{2}\int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\,dx=-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+k'$

Pour calculer I_3, remarquons que $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$. Ainsi :

$$I_3=\int \frac{\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,dx=\frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+k''=\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+k''$$

Finalement

$$I=\int \frac{3}{x^3+1}\,dx=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+K$$

Revenant à l'intégrale définie, on a

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{3}{x^3+1}\,dx &= \ln|x+1| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Bigg]_1^2 \\
&= \left(\ln 3 - \tfrac{1}{2}\ln 3 + \sqrt{3}\arctan\sqrt{3}\right) - \left(\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln 1 + \sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\ln 3 - \ln 2 + \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\ln 3 - \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \\
&\approx \tfrac{1}{2}\cdot 1,1 - 0,7 + \tfrac{1}{6}\cdot 5,4 = 0,55 - 0,7 + 0,9 = \boxed{\tfrac{3}{4}}
\end{aligned}$$