Soit $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos 2x}\, dx$.

Montrer que $I = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \dfrac{1}{2}\ln 3$.

On sait que $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$. Posons donc $\tan x = y$ (c'est-à-dire $x = \arctan y$) et donc $dx = \dfrac{dy}{1+y^2}$. Si $x = \dfrac{\pi}{6}$, alors $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, tandis que si $x = \dfrac{\pi}{12}$, alors $y = \tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ (voir ci-dessous). Ceci étant, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos 2x}\, dx &= \int_{2-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{\frac{1-y^2}{1+y^2}} \frac{dy}{1+y^2} \\
&= \int_{2-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1-y^2}\, dy \qquad (1)
\end{aligned}$$

Décomposons cette dernière intégrale (1) en somme de fractions simples :

$$\begin{aligned}
\int_{2-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1-y^2}\, dy &= \int_{2-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{A}{1+y} + \frac{B}{1-y}\right) dy \\
&= \int_{2-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{(B-A)y + (B+A)}{1-y^2}\, dy
\end{aligned}$$

Par identification, on a

$$\left\{\begin{array}{l} B-A=0 \\ B+A=2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B+1 \end{array}\right.$$

L'intégrale (1) peut se réécrire

$$\begin{aligned}
\int_{2-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1-y^2}\, dy &= \int_{2-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) dy \\
&= \ln|1+y| - \ln|1-y| \Big]_{2-\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\
&= \left(\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) - \left(\ln\left(3-\sqrt{3}\right) - \ln\left(\sqrt{3}-1\right)\right) \\
&= \ln\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} - \ln\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \\
&= \ln\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} - \ln\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \\
&= \boxed{\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\ln 3}
\end{aligned}$$

Pour déterminer la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{12}$, utilisons la formule de duplication $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$ avec $\alpha = \dfrac{\pi}{12}$. On a alors, en posant $\tan\dfrac{\pi}{12} = u$,

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2u}{1-u^2} \iff u^2 + 2u\sqrt{3} - 1 = 0$$

dont les solutions sont $u = -\sqrt{3} \pm 2$. Seule la solution $-\sqrt{3}+2$ est à retenir puisque $\tan\dfrac{\pi}{12} > 0$ ($\dfrac{\pi}{12}$ étant un angle du premier quadrant). Ainsi $\boxed{\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}}$.