Déterminer toutes les asymptotes de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 5} - |x|$.

Cette fonction peut aussi se réécrire sans la valeur absolue :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 5} - |x| = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 5} - x & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 5} + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(1) Puisque $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$, il n'y a pas d'asymptote verticale.

(2) • Si $x \geqslant 0$, on

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5} - x \\ &= [\infty - \infty] \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x + 5} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x + 5} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + x} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{2x} \\ &= \boxed{-1} \end{aligned}$$

On a donc une asymptote horizontale à droite d'équation $\boxed{AH_d \equiv y = -1}$.

• Si $x < 0$, on a de manière analogue, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 5} + x\right) = 1$, et donc une asymptote horizontale à gauche d'équation $\boxed{AH_g \equiv y = 1}$.

(3) Il n'y a pas d'asymptotes obliques, puisqu'il y a des asymptotes horizontales.