(1) Etudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln\left(e^x - 1\right)$.

(2) Démontrer que $\forall x : \ln\left(e^x - 1\right) = x + \ln\left(1 - e^{-x}\right)$. En déduire que $y = x$ est une asymptote oblique de f.

(3) Déterminer f^{-1}, la fonction inverse de f.

---

(1) On doit avoir $e^x - 1 > 0$ et donc $x > 0$. Le domaine de définition de la fonction est donc $\mathbb{R}_0^+$.

$f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ et $f''(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$. Sur dom$f$, la dérivée première est toujours strictement positive tandis que la dérivée seconde est toujours strictement négative ; la fonction est donc croissante et concave.

La fonction admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$, puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

La racine de la fonction est $x = \ln 2$. En effet $\ln(e^x - 1) = 0 \iff e^x - 1 = 1 \iff e^x = 2$, donc $x = \ln 2 \approx 0,69$.

(2) On a

$$\begin{aligned} x + \ln\left(1 - e^{-x}\right) &= \ln e^x + \ln\left(1 - e^{-x}\right) \\ &= \ln\left(e^x\left(1 - e^{-x}\right)\right) \\ &= \ln\left(e^x + 1\right) \end{aligned}$$

Lorsque $x \to +\infty$, $\ln(1 + e^x) \to 0$, et donc lorsque $x \to +\infty$, $x \approx \ln(e^x - 1)$, donc $y = x$ est une asymptote oblique de la fonction.

(3) Inverse de la fonction f :

$$x = \ln\left(e^y - 1\right) \iff e^y - 1 = e^x \iff e^y = e^x + 1 \iff y = e^x + 1$$

La fonction inverse de f est donc $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \boxed{f^{-1}(x) = \ln(e^x + 1)}$.

(4) Représentation graphique de f et de f^{-1} :