(1) Déterminer le domaine de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

(2) Démontrer que le point de coordonnées $(0; \frac{\pi}{4})$ est un centre de symétrie de son graphique.

(3) Calculer la dérivée f' et représenter la fonction graphiquement.

---

(1) On doit avoir $\dfrac{1-x}{1+x} \geqslant 0$ c'est-à-dire $-1 < x \leqslant 1$, donc $\boxed{\mathrm{dom} f :]-1; 1]}$.

(2) Le point $P(0; \frac{\pi}{4})$ est un point de symétrie [1] du graphique de la fonction ssi

$$f(x) + f(-x) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{\pi}{2} \\
\tan\left(\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) &= \infty \\
\frac{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{1-1} &\overset{!}{=} \infty
\end{aligned}$$

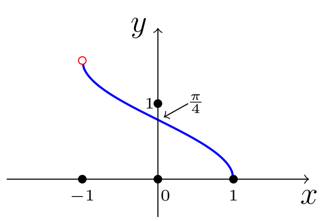
(3) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{-2}{(1+x)^2} : 2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}{1 + \dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

Cette dérivée est négative pour tout $x \in]-1; 1[$.

La fonction est donc décroissante sur son domaine de définition et a une tangente verticale en $x = \pm 1$. En effet

$$\lim_{x \to -1^+} f = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 1^-} f = 0$$

De plus, $f(0) = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ et $f'(0) = \dfrac{-1}{2}$. Après calculs, on a $f''(x) = \dfrac{-x}{2\sqrt{(1-x^2)^3}}$, le point $(0; \frac{\pi}{4})$ est le point d'inflexion du graphique de la fonction. L'équation de la tangente au point d'inflexion est $y - \frac{\pi}{4} = \frac{-1}{2} x$.



1. Si pour tout $x \in \mathrm{dom} f$, on a $f(a-x) + f(a+x) = 2b$ alors le point $M(a; b)$ est le centre de symétrie du graphique de la fonction f.