Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\sin x}$.

Posons, classiquement $u = \tan\dfrac{x}{2}$ (et donc $x = 2\arctan u$) avec $dx = \dfrac{2\,du}{1+u^2}$.

Puisque $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$, l'intégrale devient

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3+5\sin x} &= \int \frac{1}{3+\frac{10u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du \\
&= \int \frac{2}{3u^2+10u+3}\,du \\
&= \int \frac{2}{(3u+1)(u+3)}\,du \\
&\overset{(1)}{=} \frac{3}{4}\int \frac{du}{3u+1} - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u+3} \\
&= \frac{1}{4}\ln|3u+1| - \tfrac{1}{4}\ln|u+3| + K \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3u+1}{u+3}\right| + K \\
&= \boxed{\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}+3}\right| + K}
\end{aligned}$$

Détail des calculs de (1) :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(3u+1)(u+3)} &= \frac{A}{3u+1} + \frac{B}{u+3} \\
2 &= A(u+3) + B(3u+1)
\end{aligned}$$

- Si $u=-3$, alors $2=-8B$, donc $\boxed{B = \frac{-1}{4}}$;
- si $u = \frac{-1}{3}$, alors $2 = \frac{8A}{3}$, donc $\boxed{A = \frac{3}{4}}$.