Calculer $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\ dx$.

Posons, classiquement $u = \tan\dfrac{x}{2}$ (et donc $x = 2\arctan u$) avec $dx = \dfrac{2\ du}{1+u^2}$.

Puisque $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$, l'intégrale devient

$$\begin{aligned}
\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\ dx &= \int \frac{2-\frac{2u}{1+u^2}}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\ du \\
&= \int \frac{4u^2-4u+4}{(u^2+1)(u^2+3)}\ du \\
&\overset{(1)}{=} 2\int \frac{u+2}{u^2+3}\ du + \int \frac{2u}{u^2+1}\ du \\
&= \int \frac{2u}{u^2+3}\ du + \int \frac{4}{u^2+3}\ du - \int \frac{2u}{u^2+1}\ du \\
&= \ln(u^2+3) + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}} - \ln(u^2+1) + K \\
&= \ln\frac{u^2+3}{u^2+1} + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}} + K \\
&= \boxed{\ln\frac{\tan^2\frac{x}{2}+3}{\tan^2\frac{x}{2}+1} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + K}
\end{aligned}$$