Calculer $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-1}\ dx$.

Posons $x^2 = y$, donc $x\ dx = \frac{1}{2}\ dy$ permettant de réécrire l'intégrale sous la forme $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2-1}$. Utilisons alors la méthode de décomposition en fractions partielles.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^4-1}\ dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2-1} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{A}{y-1}+\frac{B}{y+1}\right)\ dy \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(A+B)y+(A-B)}{y-1}\ dy \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{y-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{y+1}\right)\ dy \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y+1} \\
&= \frac{1}{4}\ln|y-1| - \frac{1}{4}\ln|y+1| + K \\
&= \boxed{\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1} + K \text{ avec } K\in\mathbb{R}}
\end{aligned}$$