

Calculer  $\int \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}} dx$

Posons  $t^6 = 1+x$ , et donc  $6t^5 dt = dx$ . Il vient immédiatement  $t^3 = \sqrt{1+x}$  et  $t^2 = \sqrt[3]{1+x}$ .

L'intégrale devient

$$\int \frac{t^2}{1+t^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{1+t^2} dt$$

Après une division euclidienne simple, il vient

$$\begin{aligned} & 6 \int \frac{t^8}{1+t^2} dt \\ &= 6 \int \left( t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + 2t^3 - 6t + 6 \arctan t + K \\ &= \boxed{\frac{6}{7}\sqrt[6]{(1+x)^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{(1+x)^5} + 2\sqrt[6]{(1+x)^3} - 6\sqrt[6]{1+x} + 6 \arctan \sqrt[6]{1+x} + K} \end{aligned}$$