Question 1 On considère les trois fonctions f, g et h définies par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad g(x) = \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \qquad h(x) = \sin\left[1 - \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right]$$

a) Quel est le domaine de h ? Cette fonction est-elle paire ? Cette fonction est-elle impaire ?

b) En sachant que les points d'inflexion de la fonction f se trouvent en $x = \pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0,58$, esquisser un graphique approximatif de f. Justifier votre construction. En particulier, mentionner les éventuels extremums de la fonction ainsi que ses asymptotes.

c) Trouver l'image de la fonction g.

d) Sans calculer la dérivée seconde de h, trouver les extremums de h et déterminer si ce sont des maximums ou des minimums. (Justifier soigneusement le raisonnement)

e) Trouver les asymptotes de h si elles existent.

f) Esquisser un graphique de la fonction h.

Pour rappel $\exp(1) = e \approx 2,718\ldots$.

---

a) Le domaine de la fonction h est $\mathbb{R}$, il n'y a aucune condition d'existence.

Il s'agit d'une fonction **paire** puisque

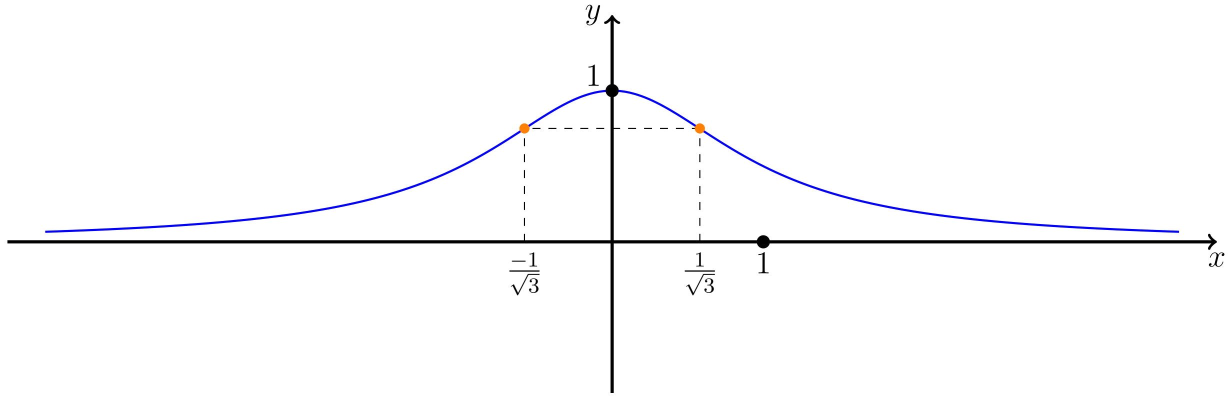
$$h(-x) = h(x) = \sin\left[1 - \exp\left(\frac{1}{1+(-x)^2}\right)\right] = \sin\left[1 - \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right]$$

b) Cette fonction n'admet pas d'asymptote verticale mais une asymptote horizontale d'équation $y = 0$. En effet, $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = 0$.

On a $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ qui s'annule en $x = 0$. Elle atteint un maximum absolu qui vaut $y = 1$ en $x = 0$.

x		0	
$-2x$	$+$	0	$-$
$(1+x^2)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Graphique



NB : on peut vérifier que la dérivée seconde est égale à $f''(x) = \dfrac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$.

c) On sait que $0 < f(x) \leqslant 1$. Or, $g(x) = e^{f(x)}$, donc $1 < g(x) \leqslant e$. Et donc $\boxed{\operatorname{Im} g =]1; e]}$.

d) Puisque $h'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)} \cdot \exp\dfrac{1}{1+x^2} \cos\left(1 - \exp\dfrac{1}{1+x^2}\right)$, cette dérivée s'annule lorsque $2x = 0$ (i.e. $x = 0$) ou $\cos\left(1 - \exp\dfrac{1}{1+x^2}\right) = 0$, c'est-à-dire $1 - \exp\dfrac{1}{1+x^2} = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Or $1 - \exp\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{2}$ est impossible car alors $\exp\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - \dfrac{\pi}{2} < 0$.

On doit donc avoir $1 - \exp\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{-\pi}{2}$, c'est-à-dire $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{\ln(1+\frac{\pi}{2})} - 1} \approx \pm 0,24$.

x		$-0,24$		0		$0,24$	
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\cos\left(1 - \exp\dfrac{1}{1+x^2}\right)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

e) Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = \sin(1 - e^0) = \sin 0 = 0$, le graphique de la fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

f) Graphique de la fonction h :