$\boxed{\text{Question 2}}$ Calculer en justifiant soigneusement :

a) $\displaystyle\int \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} \right) dx$

b) $\displaystyle\int_{-21}^{21} \frac{x^{20} + \sin^{21} x^{21}}{1 + x^{42}} dx.$

Il y a un bonus si vous prouvez aussi que la seconde intégrale est presque égale à $\pi/21$.

---

a) $\boxed{\displaystyle\int \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} \right) dx}$

On a $I = \displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \ln x \, dx + \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} dx$ et calculons uniquement la première par parties

$u = \ln x$	$u' = \dfrac{1}{x}$
$v = e^{\sqrt{x}}$	$v' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \ln x \, dx + \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} dx \\ &= e^{\sqrt{x}} \ln x - \cancel{\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} dx} + \cancel{\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} dx} \\ &= \boxed{e^{\sqrt{x}} \ln x + C} \end{aligned}$$

b) $\boxed{\displaystyle\int_{-21}^{21} \frac{x^{20} + \sin^{21} x^{21}}{1 + x^{42}} dx}$

L'intégrale peut se décomposer en deux parties :

$$\int_{-21}^{21} \frac{x^{20}}{1 + x^{42}} dx + \int_{-21}^{21} \frac{\sin^{21} x^{21}}{1 + x^{42}} dx$$

La seconde intégrale est nulle puisqu'il s'agit d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique centré à l'origine.

La première se calcule très facilement

$$\int_{-21}^{21} \frac{\frac{1}{21}(x^{21})'}{1 + x^{42}} dx = 2 \int_{0}^{21} \frac{\frac{1}{21}(x^{21})'}{1 + x^{42}} dx = \frac{2}{21} \arctan x^{21} \Big]_0^{21} = \frac{2}{21} \arctan 21^{21}$$

On sait que pour de grands réels x, $\arctan x \approx \frac{\pi}{2}$, donc cette intégrale tend vers $\dfrac{2}{21} \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{21}$.