Résoudre l'équation $2\left(1+\tan x\right)\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{\sec^2 x+\frac{4\tan x}{\sin 2x}}=0$.

Commençons par écrire les conditions d'existence :

- $\cos x \neq 0 \iff x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$;
- $\sin 2x \neq 0 \iff x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Ceci étant, l'équation peut se réécrire

$$2\left(1+\tan x\right)\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\sec^2 x+\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{\sin x\cos x}}=0 \iff \sqrt{2}\left(1+\tan x\right)-\sqrt{3}|\sec x|=0$$

■ Dans les intervalles $]\frac{\pi}{2};\pi[$ et $]\pi;\frac{3\pi}{2}[$, $\sec x>0$. Ceci permet de réécrire l'équation

$$\sqrt{2}\left(1+\tan x\right)-\sqrt{3}\sec x=0 \iff \frac{1+\tan x}{\sec x}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \iff \cos x+\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Il s'agit alors d'une équation linéaire qui se résout simplement :

$$\begin{aligned}
\cos x+\sin x &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\
\cos x+\tan\frac{\pi}{4}\sin x &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\
\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

et donc $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{6}+2k\pi$; c'est-à-dire $x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$;

■ Dans les intervalles $]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}[$, $\sec x<0$. Ceci permet de réécrire l'équation

$$\sqrt{2}\left(1+\tan x\right)+\sqrt{3}\sec x=0 \iff \frac{1+\tan x}{\sec x}=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \iff \cos x+\sin x=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Il s'agit également d'une équation linéaire qui se résout simplement :

$$\begin{aligned}
\cos x+\sin x &= \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\
\cos x+\tan\frac{\pi}{4}\sin x &= \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\
\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x &= \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{-\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

et donc $x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{4}=\frac{-5\pi}{6}+2k\pi$; c'est-à-dire $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$ ou $x=\frac{17\pi}{12}+2k\pi$.

Finalement les solutions principales sont $\boxed{Sol = \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\right\}}$.