Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que

$$\alpha+\alpha'=180° \qquad \text{et} \qquad \beta=\beta'$$

Démontrer que $aa'=bb'+cc'$ avec les notations habituelles.

De la relation aux sinus dans les deux triangles

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R \qquad \text{et} \qquad \frac{a'}{\sin\alpha'}=\frac{b'}{\sin\beta'}=\frac{c'}{\sin\gamma'}=2R'$$

on peut réécrire la thèse de l'énoncé sous la forme

$$4RR'\sin\alpha\sin\alpha'=4RR'\sin\beta\sin\beta'+4RR'\sin\gamma\sin\gamma'$$

ou encore

$$\sin\alpha\sin\alpha'=\sin\beta\sin\beta'+\sin\gamma\sin\gamma' \tag{1}$$

De plus, grâce aux hypothèses initiales, on sait que

- $\alpha+\alpha'=180°$, donc $\sin\alpha=\sin\alpha'$;
- $\sin\beta=\sin\beta'$ car $\beta=\beta'$;
- $\gamma=180°-\big(\alpha+\beta\big)$ et $\gamma'=180°-\alpha'-\beta'=\alpha-\beta$

La relation (1) peut se réécrire

$$\sin\alpha\sin\alpha'=\sin\beta\sin\beta'+\sin\gamma\sin\gamma' \iff \sin^2\alpha=\sin^2\beta+\sin\big(\alpha+\beta\big)\sin\big(\alpha-\beta\big)$$

ou encore

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha-\sin^2\beta &= \sin\big(\alpha+\beta\big)\sin\big(\alpha-\beta\big)\\ &= \tfrac{1}{2}\cos 2\beta-\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha\\ &= \tfrac{1}{2}\big(2\cos^2\beta-1\big)-\tfrac{1}{2}\big(2\cos^2\alpha-1\big)\\ &= \cos^2\beta-\cos^2\alpha\end{aligned}$$

et donc

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha \iff \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\beta+\cos^2\beta$$

ce qui est vrai.