Résoudre l'équation : $\sin x + \cos \dfrac{2x}{3} = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{6}\right)$.

La formule de Carnot $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$, ainsi que des formules d'angles associés, classiquement vues en 4$^{\text{e}}$ année, permettent d'écrire le membre de droite sous la forme

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{6}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-x}{3}\right)\right) = 1 - \sin\left(\frac{-x}{3}\right) = 1 + \sin\frac{x}{3}$$

De même $\cos\dfrac{2x}{3} = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{3}$ (en utilisant la même formule de Carnot). L'équation peut dès lors se réécrire sous la forme transformée suivante :

$$\sin x + 1 - 2\sin^2\frac{x}{3} = 1 + \sin\frac{x}{3}$$

Il y a ici un mélange de $\sin x$ et $\sin\dfrac{x}{3}$. Stratégiquement, il serait avantageux de n'avoir qu'un même type de sinus. Pour cela, utilisons la formule de « triplication » (qui se démontre très classiquement), à savoir $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ On a donc $\sin x = 3\sin\dfrac{x}{3} - 4\sin^3\dfrac{x}{3}$. Finalement, l'équation se réécrit

$$\begin{aligned} 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3} - 2\sin^2\frac{x}{3} = \sin\frac{x}{3} \quad &\iff \quad 4\sin^3\frac{x}{3} + 2\sin^2\frac{x}{3} - 2\sin\frac{x}{3} = 0 \\ &\iff \quad 2\sin\frac{x}{3}\cdot\left(2\sin^2\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{3} - 1\right) = 0 \\ &\iff \quad \sin\frac{x}{3} = 0 \quad \text{ou} \quad 2\sin^2\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{3} - 1 = 0 \end{aligned}$$

- $\sin\dfrac{x}{3} = 0 \iff \dfrac{x}{3} = k\pi \iff x = 3k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
- $2\sin^2\dfrac{x}{3} + \sin\dfrac{x}{3} - 1 = 0$ et donc $\sin\dfrac{x}{3} = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$, donc $\sin\dfrac{x}{3} = -1$ ou $\sin\dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{2}$.
  - •• $\sin\dfrac{x}{3} = -1 \iff \dfrac{x}{3} = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \dfrac{\pi}{2} + 6k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
  - •• $\sin\dfrac{x}{3} = \frac{1}{2}$, donc $\dfrac{x}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \iff x = \dfrac{\pi}{2} + 6k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou
    $\dfrac{x}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \iff x = \dfrac{\pi}{2} + 6k\pi$.