Résoudre l'équation : $\tan x \cot 2x = \tan 2x \cot x$

Conditions d'existence :

- $\tan x \in \mathbb{R}$ donc $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- $\tan 2x \in \mathbb{R}$ donc $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$
- $\cot x \in \mathbb{R}$ donc $x \neq k\pi$
- $\cot 2x \in \mathbb{R}$ donc $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

Ces différentes conditions d'existence peuvent se résumer en une seule : $\boxed{x \neq \dfrac{k\pi}{4}}$.

On a donc

$$\begin{aligned}
& \tan x \cot 2x = \tan 2x \cot x \\
\iff & \tan x \cot 2x - \tan 2x \cot x = 0 \\
\iff & \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \\
\iff & \sin^2 x \cdot \cos^2 2x - \sin^2 2x \cdot \cos^2 x = 0 \\
\iff & \Big(\sin x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos x\Big) \cdot \Big(\sin x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos x\Big) = 0 \\
\iff & \sin(x - 2x) \cdot \sin(x + 2x) = 0 \\
\iff & \sin x \cdot \sin 3x = 0 \\
\iff & \sin x = 0 \text{ (à rejeter)} \qquad \text{ou} \qquad \sin 3x = 0 \\
\iff & x = k\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Finalement, en tenant compte des conditions d'existence, les solutions principales sont $\boxed{Sol = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}}$.