Si ABC est un tringle rectangle en A, démontrer que $\cos\left(\widehat{B}-\widehat{C}\right)=\dfrac{2bc}{a^2}$ et $\cos 2\widehat{B}=\dfrac{c^2-b^2}{a^2}$.

Puisque le triangle ABC est rectangle en A, on sait que $\sin\widehat{B}=\cos\widehat{C}$ et $\sin\widehat{C}=\cos\widehat{B}$. De plus, on sait que

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=2R$$

où R désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Puisque a est l''hypoténuse du triangle rectangle ABC, on sait également que $2R=a$.

Ceci étant, on a

$$\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{B}-\widehat{C}\right) &= \cos\widehat{B}\cos\widehat{C}+\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\\
&= 2\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\\
&= 2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}\\
&= \boxed{\frac{2bc}{a^2}}
\end{aligned}$$

De même, grâce aux formules de Carnot,

$$\begin{aligned}
\cos 2\widehat{B} &= 1-2\sin^2\widehat{B}\\
&= 1-2\left(\frac{b}{a}\right)^2\\
&= \frac{a^2-2b^2}{a^2}\\
&= \frac{(b^2+c^2)-2b^2}{a^2}\\
&= \boxed{\frac{c^2-b^2}{a^2}}
\end{aligned}$$