Si le triangle $ABC$ est rectangle en $A$, démontrer que $\dfrac{1}{\cos 2\widehat{B}} - \tan 2\widehat{C} = \dfrac{|AB| + |AC|}{|AB| - |AC|}$.

On sait que $\cos \widehat{B} = \dfrac{|AB|}{|BC|}$ et $\tan \widehat{C} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$ (puisqu'il s'agit d'un triangle rectangle). Utilisons de plus les formules $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$.
Partant du membre de gauche, on a successivement

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos 2\widehat{B}} - \tan 2\widehat{C} &= \frac{1}{2\cos^2 \widehat{B} - 1} - \frac{2\tan \widehat{C}}{1 - \tan^2 \widehat{C}} \\
&= \frac{1}{2\left(\dfrac{|AB|}{|BC|}\right)^2 - 1} - \frac{2\dfrac{|AB|}{|AC|}}{1 - \left(\dfrac{|AB|}{|AC|}\right)^2} \\
&= \frac{|BC|^2}{2|AB|^2 - |BC|^2} - \frac{2|AB|.|AC|}{|AC|^2 - |AB|^2} \\
&= \frac{|BC|^2}{2|AB|^2 - |BC|^2} - \frac{2|AB|.|AC|}{(|BC|^2 - |AB|^2) - |AB|^2} \\
&= \frac{|BC|^2}{2|AB|^2 - |BC|^2} + \frac{2|AB|.|AC|}{2|AB|^2 - |BC|^2} \\
&= \frac{|AB|^2 + |AC|^2}{2|AB|^2 - |BC|^2} + \frac{2|AB|.|AC|}{2|AB|^2 - |BC|^2} \\
&= \frac{|AB|^2 + |AC|^2 + 2|AB|.|AC|}{2|AB|^2 - |BC|^2} \\
&= \frac{|AB|^2 + |AC|^2 + 2|AB|.|AC|}{2|AB|^2 - (|AC|^2 + |AB|^2)} \\
&= \frac{|AB|^2 + |AC|^2 + 2|AB|.|AC|}{|AB|^2 - |AC|^2} \\
&= \frac{(|AB| + |AC|)^2}{(|AB| - |AC|)(|AB| + |AC|)} \\
&= \frac{|AB| + |AC|}{|AB| - |AC|}
\end{aligned}$$