Résoudre l'équation : $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

Utilisons successivement la formule de Carnot $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ et une formule de Simpson $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
& \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1 \\
\iff\quad & \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} = 1 \\
\iff\quad & 2 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 2 \\
\iff\quad & 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 2 \\
\iff\quad & 2\cos^2 x + 2\cos 5x \cos x = 0 \\
\iff\quad & 2\cos x\,(\cos x + \cos 5x) = 0 \\
\iff\quad & 4\cos x \cos 2x \cos 3x = 0 \\
\iff\quad & \cos x = 0 \qquad \text{ou} \qquad \cos 2x = 0 \qquad \text{ou} \qquad \cos 3x = 0
\end{aligned}$$

- $\cos x = 0$ et donc $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).
- $\cos 2x = 0$ et donc $2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), c'est-à-dire $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$
- $\cos 3x = 0$ et donc $3x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), c'est-à-dire $x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}$

Finalement, les solutions principales sont $\boxed{Sol = \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{4}; \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$.