Résolution UCL-juillet 1995

Énoncé :

Résoudre l'équation suivante en x :

$$\sin(3x) = 8\sin^3(x)$$

Sachant que $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$ *, on peut réécrire ;

$$-4\sin^3(x) + 3\sin(x) = 8\sin^3(x)$$
$$\Leftrightarrow -12\sin^3(x) + 3\sin(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow -3\sin(x)\,(4\sin^2(x) - 1) = 0$$

En appliquant la règle du produit nul sur chaque facteur on obtient ;

- 1er facteur :

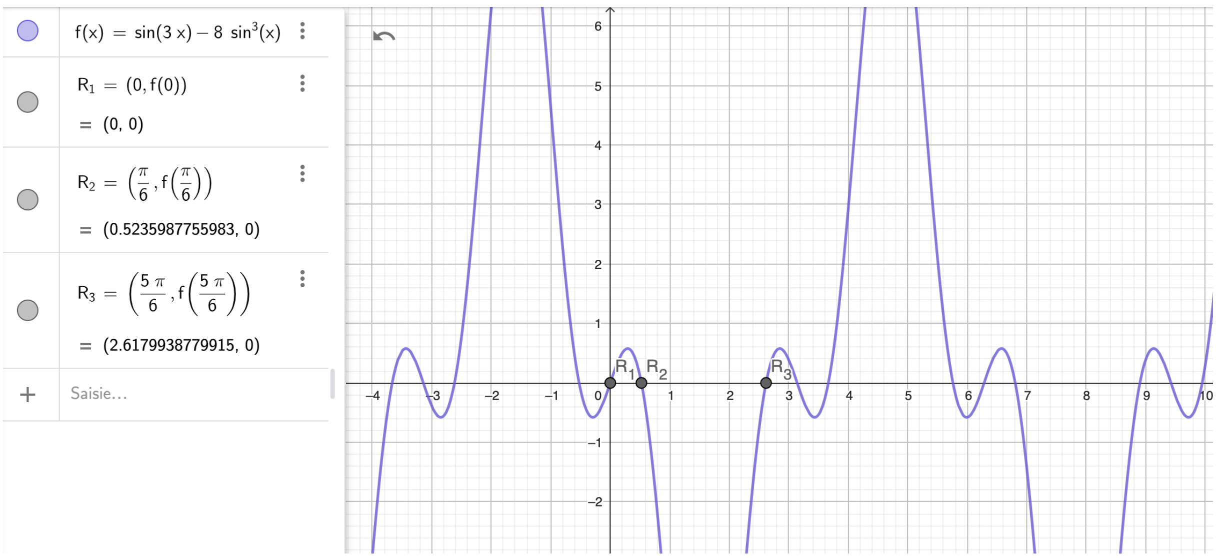
$$-3\sin(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin(x) = 0$$
$$\Rightarrow x = k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$$

- 2nd facteur :

$$4\sin^2(x) - 1 = 0$$
$$\sin^2(x) = \frac{1}{4}$$
$$\sin(x) = \pm\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi \;\; et \;\; x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{k\pi\,; \frac{\pi}{6} + k\pi\,; \frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Visualisation des solutions en faisant dessiner le graphe de cette équation en en se focalisant sur les racines de la fonctions : $f(x) = \sin(3x) - 8\sin^3(x)$



*En développant sin $(3x)$:

$$\sin(3x) = \sin(2x + x)$$
$$\Leftrightarrow \sin(3x) = \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x)$$
$$\Leftrightarrow \sin(3x) = 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)\,(\cos^2(x) - \sin^2(x))$$
$$\Leftrightarrow \sin(3x) = 2\sin(x)\left(1 - \sin^2(x)\right) + \sin(x)\,(1 - 2\sin^2(x))$$
$$\Leftrightarrow \sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$