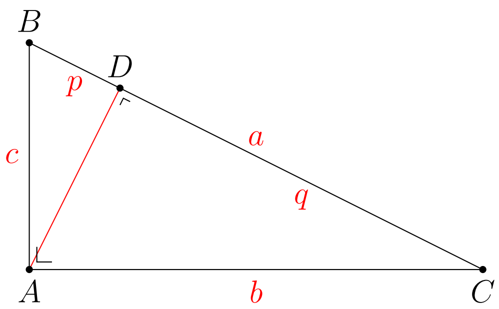
Dans un triangle ABC rectangle en A, $[AD]$ est la hauteur. On pose $|BD| = p$ et $|DC| = q$. Démontrer que

$$\frac{p-q}{p+q} = \cos 2\widehat{B}$$



1e solution

Puisque $p+q = a$ (avec les notations habituelles), la relation s'écrit également $p-q = a \cdot \cos 2\widehat{B}$. Dans le triangle BDA rectangle en D, on a $\cos \widehat{B} = \frac{p}{c}$, donc

$$p = c \cdot \cos \widehat{B} \tag{1}$$

Dans le triangle CDA rectangle en D, on a $\cos \widehat{C} = \frac{q}{b}$ mais aussi $\sin \widehat{B} = \cos \widehat{C}$, donc

$$q = b \cdot \sin \widehat{B} \tag{2}$$

Dès lors $p^2 = c^2 \cdot \cos^2 \widehat{B}$ et $q^2 = b^2 \cdot \sin^2 \widehat{B} = b^2 \cdot \left(1 - \cos^2 \widehat{B}\right)$. Soustrayant ces égalités, il vient

$$\begin{aligned}
p^2 - q^2 &= c^2 \cdot \cos^2 \widehat{B} - b^2(1 - \cos^2 \widehat{B}) \\
(p-q)(p+q) &= \cos^2 \widehat{B} \cdot (b^2 + c^2) - b^2 \\
a(p-q) &= a^2 \cdot \cos^2 \widehat{B} - b^2 \\
p - q &= a \cdot \cos^2 \widehat{B} - \frac{b^2}{a} \\
p - q &= a \cdot \cos^2 \widehat{B} - \frac{a^2 \cdot \sin^2 \widehat{B}}{a} \\
p - q &= a \cdot \left(\cos^2 \widehat{B} - \sin^2 \widehat{B}\right)
\end{aligned}$$

Grâce à la formule de duplication $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$, on a donc $\boxed{p - q = a \cdot \cos 2\widehat{B}}$

2e solution

Des relations $p = c \cdot \cos \widehat{B}$ et $q = b \cdot \sin \widehat{B}$ (voir ci-dessus), on tire

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \cot \widehat{B}$$

Mais, on sait que $\cot \widehat{B} = \dfrac{c}{b}$, donc

$$\frac{p}{q} = \cot^2 \widehat{B} \qquad \text{ou} \qquad p = q \cdot \cot^2 \widehat{B}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{p-q}{p+q} &= \frac{q \cdot \cot^2 \widehat{B} - q}{q \cdot \cot^2 \widehat{B} + q} \\
&= \frac{\cot^2 \widehat{B} - 1}{\cot^2 \widehat{B} + 1} \\
&= \frac{\dfrac{1}{\tan^2 \widehat{B}} - 1}{\dfrac{1}{\tan^2 \widehat{B}} + 1} \\
&= \frac{1 - \tan^2 \widehat{B}}{1 + \tan^2 \widehat{B}} \\
&= \cos 2\widehat{B}
\end{aligned}$$