TRIGONOMETRIE

$\boxed{\text{Question 1)}}$

Calculer

a) $\boxed{\tan \frac{23\pi}{12}}$

On a évidemment que $\tan \frac{23\pi}{12} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\tan \frac{\pi}{12}$.

Appliquons ensuite la formule de duplication en tangente, à savoir $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ avec $a = \frac{\pi}{12}$, on a donc $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\tan \frac{\pi}{12}}{1-\tan^2 \frac{\pi}{12}}$. Posons $t = \tan \frac{\pi}{12}$. La dernière équation devient $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2t}{1-t^2}$ ou encore $t^2 + 2t\sqrt{3} - 1 = 0$ dont les solutions sont $-\sqrt{3} \pm 2$. Seule la solution $-\sqrt{3}+2$ doit être retenue (car $\tan \frac{\pi}{12} > 0$, $\frac{\pi}{12}$ étant dans le 1er quadrant).

Finalement $\tan \frac{23\pi}{12} = -\tan \frac{\pi}{12} = -\left(-\sqrt{3}+2\right) = \boxed{\sqrt{3}-2}$.

b) $\boxed{\tan\left(\arctan \frac{23\pi}{12}\right)}$

On sait que $\tan(\arctan x) = x$, pour tout x, donc $\boxed{\tan\left(\arctan \frac{23\pi}{12}\right) = \frac{23\pi}{12}}$.

c) $\boxed{\arctan\left(\tan \frac{23\pi}{12}\right)}$

On sait que $\arctan(\tan x) = x$ si et seulement si $x \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\boxed{\arctan\left(\tan \frac{23\pi}{12}\right) = \frac{-\pi}{12}}$.

d) $\boxed{\sin(2\arctan 3)}$

En appliquant les trois formules classiques $\sin 2a = 2\sin a \cos a$, $\sin(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ et $\cos(\arctan a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, on obtient immédiatement

$$\begin{aligned}
\sin(2\arctan 3) &= 2\sin(\arctan 3)\cos(\arctan 3) \\
&= 2\frac{3}{\sqrt{1+3^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} \\
&= \boxed{\frac{3}{5}}
\end{aligned}$$