Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 0

EXALG001 – EXALG009

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG001 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1996.

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{\sqrt{x^3(x-1)}}{x} \leq \frac{3}{8}$$

CE :

1) $x^3(x-1) \geq 0$

Tableau des signes :

		0		1	
x^3	-	0	+	+	+
x -1	-	-	-	0	+
	+	0	$-$	0	+

2) $x > 0$

Conclusion : $x < 0$ *et* $x \geq 1$

Soit $x > 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^3(x\text{-}1)}{x^2} \leq \dfrac{9}{64} \quad \rightarrow \quad x^2 - x - \dfrac{9}{64} \leq 0$

dont les racines sont : $x = -\dfrac{1}{8}$ et $x = \dfrac{9}{8} \quad \rightarrow \quad 1 \leq x \leq \dfrac{9}{8}$

Soit $x < 0 \quad \rightarrow$ L'inéquation est toujours vérifiée.

Solutions :

$$x < 0 \quad 1 \leq x \leq \frac{9}{8}$$

Résolu le 9 décembre 2004

EXALG002 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1996.

Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y+z=2a+1 \\ ax-ay-2z=0 \\ ax+2ay+a^2z=4a^2-1 \end{cases}$$

où a est un paramètre réel.

Méthode du Δ

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -a & -2 \\ a & 2a & a^2 \end{vmatrix}=-a(2a+1)(a-2)$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2a+1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & -2 \\ (2a+1)(2a-1) & 2a & a^2 \end{vmatrix}=-(2a+1)(a-2)(a^2+1)$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & 1 \\ a & 0 & -2 \\ a & (2a+1)(2a-1) & a^2 \end{vmatrix}=-(2a+1)(a-2)(a-1)(a+1)$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2a+1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2a & (2a+1)(2a-1) \end{vmatrix}=a(2a+1)(2-a)$$

Discussion

1) $a=-\frac{1}{2} \quad \to \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-2z=0 \\ -\frac{1}{2}x-y+\frac{1}{4}z=0 \end{cases} \quad \to \begin{cases} x=-\frac{5}{2}z \\ y=\frac{3}{2}z \end{cases}$ Simple indétermination

2) $a=0 \quad \to \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ -2z=0 \\ 0=1 \end{cases} \quad \to$ Système impossible

3) $a=2 \quad \to \quad \begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x-2y-2z=0 \\ 2x+4y+4z=15 \end{cases} \quad \to$ Système impossible

4) $a \neq -\frac{1}{2}, \quad 0, \quad 2 \quad \to \quad \begin{cases} x=\dfrac{a^2+1}{a} \\ y=\dfrac{(a-1)(a+1)}{a} \\ z=1 \end{cases}$

Résolu le 9 décembre 2004. Modifié le 11 février 2005

EXALG003 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation

$$x^6-3x^5+4x^4-6x^3+5x^2-3x+2=0$$

sachant qu'elle admet i comme racine double

Soit $P(x)$ l'équation. Si i est racine double, $P(x)$ est divisible par x^2+1:
Effectuons la division on obtient :
$P(x)=(x^2+1)(x^4-3x^3+3x^2-3x+2)$

Soit $Q(x)$ le deuxième facteur. $Q(1)\ =0$, donc $Q(x)$ est divisible par $x-1$.

$$\begin{array}{l|ccccc}
 & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\
\text{Horner : } 1 & & 1 & -2 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0
\end{array} \rightarrow Q(x)=(x-1)(x^3-2x^2+x-2)$$

Soit $T(x)$ le deuxième facteur de $Q(x)$. On a
$T(x)=x^3-2x^2+x-2=x^2(x-2)+(x-2)=(x-2)(x^2+1)$

$\rightarrow P(x)=(x^2+1)^2(x-2)(x-1)$

Solutions : i et $-i$ racines doubles, 2 et 1 racines simples.

Résolu le 9 décembre 2004

EXALG004 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre

$$4x^3 - 24x^2 + 23x + 18,$$

sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Soient a, $a+r$ et $a+2r$ les racines.

$P(x) = (x-a)(x-a-r)(x-a-2r) = x^3 - 3(a+r)x^2 + (2a+r)(a+2r)x - a(a+r)(a+2r)$

$$\begin{cases} -3(a+r) = -\dfrac{24}{4} \\ (2a+r)(a+2r) = \dfrac{23}{4} \quad \to \quad \left[2(2-r)+r\right](2-r+2r) = \dfrac{23}{4} \quad \to \quad 4r^2 + 8r - 5 = 0 \\ -a(a+r)(a+2r) = \dfrac{18}{4} \end{cases}$$

$\to \quad r_1 = -\dfrac{1}{2} < 0$ à rejeter et $r_2 = 2.5 \quad \to \quad a = -0.5,\ a+r = 2,\ a+2r = 4.5$

Conclusion : $P(x) = 4(x+0.5)(x-2)(x-4.5)$

Résolu le 9 décembre 2004

EXALG005 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

Si x_1, x_2 et x_3 sont les racines de l'équation

$$P(x) = x^3 - 5x + 1 = 0,$$

calculer

$$S(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -5 \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases}$$

Or $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$$\rightarrow \quad 0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 10}$$

Résolu le 9 décembre 2001. Corrigé le 11 octobre 2004.

EXALG006 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

Décomposer $x^5 - 1 = 0$ en un produit de 3 facteurs réels.

$P(x)$ est divisible par x - 1

Horner :

$$\begin{array}{c|cccccc} & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ & 1 & & & & & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \to \quad P(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Soit $Q(x)$ le deuxième facteur:

$$Q(x) = (x^2 + a_1 x + b_1)(x^2 + a_2 x + b_2)$$

$$= x^4 + (a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2 + a_1 a_2)x^2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2)x + b_1 b_2 = 0$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 = 1 \\ a_2 b_1 + a_1 b_2 = 1 \\ b_1 b_2 = 1 \end{cases} \quad \text{Supposons } b_1 = 1 \to b_2 = 1 \to \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 a_2 = -1 \end{cases}$$

a_1 et a_2 sont solutions de l'équation : $y^2 - y - 1 = 0$

$$\to \quad y_1 = a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\to \quad P(x) = (x-1)\left(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1\right)$$

Résolu le 9 décembre 2004

EXALG007 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001. FACSA, ULB, Bruxelles - septembre 2009.

Enoncé de Polytech

$Q_1(x)$ et c sont respectivement le quotient et le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $x-a$.
$Q_2(x)$ et d sont respectivement le quotient et le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $x-b$.
On demande :

Quel est le reste R de la division de $P(x)$ par $(x-a)(x-b)$.

Si $Q_3(x)$ est le quotient de cette division, déterminer $Q_1(x)$ en fonction de $Q_3(x)$.

Enoncé de FACSA

Soit P un polynôme en la variable réelle x, à coefficients réels. Si a et b sont deux réels distincts, déterminer le reste de la division de P par $(x-a)(x-b)$, sachant que le reste de la division de P par $x-a$ vaut 1 et que le reste de la division de ce même polynôme P par $x-b$ vaut -1.

On a donc : $P(x)=(x-a)Q_1(x)+c$ et $P(x)=(x-b)Q_2(x)+d$

et également : $P(x)=(x-a)(x-b)Q_3(x)+R(x)$ avec $R(x)=R_1x+R_0$

On en tire $\begin{cases} P(a)=R(a)=c=R_1a+R_0 \\ P(b)=R(b)=d=R_1b+R_0 \end{cases} \rightarrow \quad c-d=(a-b)R_1 \quad \rightarrow \quad R_1=\dfrac{c-d}{a-b}$

$$\rightarrow \quad c=\frac{c-d}{a-b}a+R_0 \quad \rightarrow \quad R_0=\frac{c(a-b)-(c-d)a}{a-b}=\frac{ad-bc}{a-b}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{R(x)=\frac{c-d}{a-b}x+\frac{ad-bc}{a-b}}$$

$$P(x)=(x-a)Q_1(x)+c$$

$$P(x)=(x-a)(x-b)Q_3(x)+\frac{c-d}{a-b}x+\frac{ad-bc}{a-b}$$

$$\rightarrow \quad (x-a)Q_1(x)+c=(x-a)(x-b)Q_3(x)+\frac{c-d}{a-b}x+\frac{ad-bc}{a-b}$$

$$\rightarrow \quad Q_1(x)=(x-b)Q_3(x)+\frac{1}{x-a}\left(\frac{c-d}{a-b}x+\frac{ad-bc}{a-b}-c\right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{Q_1(x)=(x-b)Q_3(x)+\frac{c-d}{a-b}}$$

Pour la question de FACSA : $c=1$ et $d=-1$. Ce qui donne : $\boxed{R(x)=\dfrac{2}{a-b}x-\dfrac{a+b}{a-b}}$

Résolu le 9 décembre 2004. Modifié le 22 juin 2010

EXALG008 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme $P(x)$ soit divisible par $(x-a)^2$ est que $P(a) = P'(a) = 0$ où $P'(x)$ désigne la dérivée de $P(x)$.

La condition est nécessaire puisque si $P(x)$ est divisble par $(x-a)^2$:

$P(x) = (x-a)^2 R(x) \rightarrow P'(x) = 2(x-a)R(x) + (x-a)^2 R'(x)$

On vérifie immédiatement que $P(a) = P'(a) = 0$

La condition est suffisante puisque si $P(a) = P'(a) = 0,$ alors :

$P(x) = (x-a)Q(x)$ car $P(a) = 0$

$P'(x) = Q(x) + (x-a)\ Q'(x) \quad \rightarrow \quad P'(a) = Q(a) = 0 \quad \rightarrow \quad Q(a) = 0$

Donc $Q(x)$ est divisible par $(x-a)$. Dés lors : $Q(x) = (x-a)R(x)$

et $P(x) = (x-a)^2 R(x)$ c'est-à-dire que $P(x)$ est divisible par $(x-a)^2$

Résolu le 9 décembre 2001. Corrigé le 11 octobre 2004

EXALG009 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

a) Déterminer les paramètres a et b du polynôme suivant :

$$P(x) = x^3 + (a+b+2)x^2 + (ab+\ 2a+\ 2b)x + 2ab$$

de telle façon que le reste de la division par $(x-2)$ soit égal à 5, et que le reste de la division par $(x+1)$ soit égal à $5/4$

b) En exploitant ces seules données (sans effectuer la division), déterminer quel sera le reste de la division de $P(x)$ par $(x-2)(x+1)$

---

a) $P(x) = x^3 + (a+b+2)x^2 + (ab+2a+2b)x + 2ab$

$P(2) = 8 + 4(a+b+2) + 2(ab+2a+2b) + 2ab = 5 \quad \rightarrow \quad 4ab + 8a + 8b = -11$

$P(-1) = -1 + a + b + 2 - ab - 2a - 2b + 2ab = \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad ab - a - b = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} 4ab + 8a + 8b = -11 \\ ab - a - b = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ab + 2a + 2b = -\frac{11}{4} \\ ab - a - b = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \ -3a - 3b = -3$$

$\rightarrow \quad b = -(a+1)$

Remplacons dans une des équations :

$$-a(a+1) - a + a + 1 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad a^2 + a - \frac{3}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{3}{2} \rightarrow b_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{2} \rightarrow b_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$P(x)$ étant symétrique en a et b, il n'y a qu'une seule solution.

B) $R(x) = R_1 x + R_0 \quad R(2) = R_1 2 + R_0 = 5 \quad R(-1) = -R_1 + R_0 = \frac{5}{4}$

$\rightarrow \quad R_1 = \frac{5}{4} \quad et \quad R_0 = \frac{5}{2}$

$\rightarrow \quad R(x) = \frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$

Résolu le 9 décembre 2004. Modifié le 10 septembre 2008 (Pierre Bernimont)