Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 10

EXALG100 – EXALG109

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG100– Louvain – Septembre 2000.

Soit p un paramètre réel, avec $p>0$.

Discuter et résoudre, dans les nombres réels, le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} p^x = 2^{-5x-2y} \\ 2 p^y = 2^{3x+2y} \end{cases}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Transformation du système :

Puisque $p > 0$, on peut écrire $p = 2^{\log_2 p}$. Le système (I) est donc équivalent à :

$$\begin{cases} 2^{-2}.2^{x.\log_2 p} & = & 2^{-5x-2y} \\ 2^1.2^{y.\log_2 p} & = & 2^{3x+2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-2+x.\log_2 p} & = & 2^{-5x-2y} \\ 2^{1+y.\log_2 p} & = & 2^{3x+2y} \end{cases}$$

Les deux équations sont dans la forme standard pour pouvoir égaliser les exposants. Les système (I) est donc équivalent au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -2 + x.\log_2 p & = & -5x - 2y \\ 1 + y.\log_2 p & = & 3x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{(5 + \log_2 p)x + 2y} & = & \mathbf{2} \\ \mathbf{3x + (2 - \log_2 p)y} & = & \mathbf{1} \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Discussion et résolution du système linéaire (II) :

$$\det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} 5 + \log_2 p & 2 \\ 3 & 2 - \log_2 p \end{vmatrix} = -(\log_2 p)^2 - 3\log_2 p + 4 = -(\log_2 p + 4)(\log_2 p - 1)$$

Le déterminant de la matrice des coefficients s'annule pour $\log_2 p = 1$ et pour $\log_2 p = -4$, donc pour $p = 2$ et pour $p = \frac{1}{16}$.

① $p = 2$: $\log_2 p = 1$

$$\begin{cases} 6x + 2y & = & 2 \\ 3x + y & = & 1 \end{cases}$$

Les deux équations sont identiques. Le système est donc **simplement indéterminé** et l'ensemble de ses solutions est $S = \{(k\,;\,1-3k)|k \in \mathbb{R}\}$.

② $p = \frac{1}{16}$: $\log_2 p = -4$

$$\begin{cases} x + 2x & = & 2 \\ 3x + 6y & = & 1 \end{cases}$$

Les deux équations sont contradictoires. Le système est donc **impossible** et $S = \emptyset$.

③ $p \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \left\{2, \frac{1}{16}\right\}$

Le système est **déterminé** et on peut le résoudre par la règle de Cramer :

$\det \mathcal{A}_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 - \log_2 p \end{vmatrix} = 2 - 2\log_2 p = 2(1 - \log_2 p)$ $\qquad x = \frac{2}{4+\log_2 p}$

$\det \mathcal{A}_y = \begin{vmatrix} 5 + \log_2 p & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \log_2 p - 1$ $\qquad y = \frac{-1}{4+\log_2 p}$

Résumé final :

Si $= 2$, alors : $S = \{(k\,;\,1-3k)|k \in \mathbb{R}\}$

Si $= \frac{1}{16}$, alors : $S = \emptyset$.

Si $p \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \left\{2, \frac{1}{16}\right\}$, alors : $S = \left\{\left(\frac{2}{4+\log_2 p}\,;\,\frac{-1}{4+\log_2 p}\right)\right\}$

Modifié le 23 décembre 2011

EXALG101– Louvain – Septembre 2000.

Résoudre, dans les nombres réels, l'inéquation suivante :

$$\left(x-\frac{2}{x}\right)^6 \leq 1$$

CE : $x \neq 0$

Posons : $y=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2 \rightarrow$ L'inéquation devient : $y^3-1\leq 0 \rightarrow (y-1)\left(y^2+y+1\right)\leq 0$

Or le deuxième facteur a un Δ négatif et est toujours positif.

L'inéquation se ramène donc à étudier : $y-1\leq 0$

$\rightarrow \left(x-\frac{2}{x}\right)^2-1\leq 0 \rightarrow \left(x-\frac{2}{x}-1\right)\left(x-\frac{2}{x}+1\right)\leq 0 \rightarrow \frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2+x-2\right)}{x^2}\leq 0$

Et comme x^2 est toujours positif $\rightarrow \left(x^2-x-2\right)\left(x^2+x-2\right)\leq 0$

$\rightarrow (x+1)(x-2)(x-1)(x+2)\leq 0$

Il reste à établir un tableau de signe :

		-2		-1		$+1$		$+2$	
$x+2$	$-$	0	+	+	+	+	+	+	+
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	+	+	+	+	+
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	+	+	+
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	+
	+	0	$-$	0	+	0	$-$	0	+

Les solutions sont donc : $[-2;-1]\cup[+1;+2]$ (Compatible avec CE)

Modifié le 28 août 2008 (Emmanuelle Simon). Modifié le 23 aout 2009 (Johnny Gérard)

EXALG102– Louvain – Septembre 2000.

On considère un véhicule qui, par exemple comme un tracteur, a typiquement des roues de diamètres différents à l'avant et à l'arrière.
Le véhicule considéré effectue un trajet d'une longueur d. Au cours de ce trajet, les roues avant (de circonférence c_1) effectuent 3000 tours de plus que les roues arrière (de circonférence c_2).

Si les circonférences des deux roues étaient toutes deux augmentées de 0.5 m, les roues avant n'effectueraient plus que 2100 tours de plus que les roues arrière pour le même trajet.

Le problème est de déterminer les circonférences c_1 et c_2 des roues du véhicule.
On vous demande dans l'ordre : TOUT D'ABORD de bien poser le problème et de le mettre en équation ; ENSUITE, de le résoudre ; et ENFIN, d'appliquer votre résultat au cas où d = 14 km.

Situation	Roues	Cironférences	Nombre de tour
1	avant	c_1	n_1
	arrière	c_2	n_2
2	avant	c'_1	n'_1
	arrière	c'_2	n'_2

Les relations suivantes sont immédiates :

$$\begin{cases} n_1 - n_2 = 3000 \\ n'_1 - n'_2 = 2100 \\ n_1 = \dfrac{d}{c_1} \\ n_2 = \dfrac{d}{c_2} \\ n'_1 = \dfrac{d}{c'_1} = \dfrac{d}{c_1 + 0.5} \\ n'_2 = \dfrac{d}{c'_2} = \dfrac{d}{c_2 + 0.5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{c_1} - \dfrac{d}{c_2} = 3000 \\ \dfrac{d}{c_1 + 0.5} - \dfrac{d}{c_2 + 0.5} = 2100 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (c_2 - c_1)d = 3000 c_1 c_2 & (1) \\ (c_2 - c_1)d = 2100(c_1 + 0.5)(c_2 + 0.5) & (2) \end{cases}$$

De (1), on tire : $c_2 = \dfrac{c_1 d}{d - 3000 c_1}$ $\quad (3)$

et de (1) et (2), on obtient : $3000 c_1 c_2 = 2100(c_1 + 0.5)(c_2 + 0.5)$

On remplace c_2 au moyen de la relation (3), ce qui donnera après calcul :

$$(3\text{d}+10500)c_1^2 - (7d - 5250)c_1 - 1.75d = 0$$

On résoud cette équation du second dégré, et finalement :

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{7d - 5250 + \sqrt{70d^2 + 27562500}}{2(3d + 10500)} & \forall d > 0 \\ c_2 = \dfrac{c_1 d}{d - 3000 c_1} \end{cases}$$

Dans le cas où $d = 14000\ m$, on obtient :

$$\begin{cases} c_1 = 2\ m \\ c_2 = 3.5\ m \end{cases}$$

EXALG103 – Louvain – Septembre 2000.

Résoudre dans les nombres complexes l'équation suivante :

$$z^4 = z^2\left(2i-1\right)+2i$$

$z^4-\left(2i-1\right)z^2-2i=0$

Le delta de cette équation du second degré est :

$\Delta=\left(2i-1\right)^2+8i=-4-4i+1+8i=-3+4i$

Calculons la racine carrée de ce delta :

$$\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ 2xy=4 \qquad (\rightarrow \text{racines de même signe}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2=4 \end{cases}$$

$$\rightarrow\ X^2-5X+4=0 \ \rightarrow \begin{cases} X_1=1 \\ X_2=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{cases}$$

Donc : $\sqrt{\Delta}=1+2i$

On a dès lors : $z^2=\dfrac{2i-1\pm\left(1+2i\right)}{2} \ \rightarrow \begin{cases} z_1^2=-1 \\ z_2^2=2i \end{cases}$

<u>1) $z_1^2=-1$</u> $\quad \rightarrow \begin{cases} z_{11}=i \\ z_{12}=-i \end{cases}$

<u>2) $z_2^2=2i$</u>

En appliquant la même méthode que ci-dessus, on trouve :

$$\begin{cases} z_{21}=1+i \\ z_{22}=-1-i \end{cases}$$

<u>Conclusions</u>

Les solutions sont : $\boxed{i,-i,1+i,-1-i}$

Modifié le 7 septembre 2004

EXALG104 – Louvain – Juillet 2001, Série 1.

Déterminer les polynômes *P(x)* de degré trois, à coefficients réels, tels que :

(1) Le coefficient de x^3 dans *P(x)* est égal à 1 ;

(2) *P(x)* s'annule lorsque $x = 2\sqrt{2}$ et lorsque $x = -2\sqrt{2}$

(3) Le reste de la division de $[P(x)]^2$ par $x-3$ est égal à 4.

Le polynôme peut se mettre sous la forme :

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)(x-x_3) = \left(x^2-8\right)(x-x_3)$$

De l'hypothèse (3), il résulte :

$$\left[P(3)\right]^2 = \left[(9-8)^2(x-x_3)\right]^2 = 4 \quad \to \quad x_3^2 - 6x_3 + 5 = (x-1)(x-5) = 0$$

<u>Conclusions</u> :

Nous avons deux solutions :

$\boxed{P(x) = \left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)(x-1)}$ et $\boxed{P(x) = \left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)(x-5)}$

Modifié le 7 septembre 2004. Modifié le 14 janvier 06 (Sabine Bouzette)

EXALG105 – Louvain – Juillet 2001, Série 1.

On considère le système d'équations que voici, dans lequel p est un paramètre réel :

$$\begin{cases} 2x & + & y & & & = & px \\ x & + & 2y & + & z & = & py \\ & & y & + & 2z & = & pz \end{cases}$$

Déterminer toutes les valeurs de p pour lesquelles ce système admet une solution non triviale, c'est-à-dire une solution $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.
Ensuite, choisir *une* des valeurs de p ainsi obtenues, et donner l'ensemble des solutions (x, y, z) correspondantes.

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} (2-p)x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & (2-p)y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & (2-p)z & = & 0 \end{cases}$$

C'est un système homogène.

Pour ne pas avoir de solutions triviales, il faut que :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2-p & 1 \\ 0 & 1 & 2-p \end{vmatrix} = 0$$

$$\to \Delta = (2-p)\left(p-2-2\sqrt{2}\right)\left(p-2+2\sqrt{2}\right)$$

Le système admet des solutions non-triviales si p est égale à :

$$\boxed{2;\ 2+2\sqrt{2};\ 2-2\sqrt{2}}$$

Choisissons $p = 2$, le système devient :

$$\begin{cases} 0 & + & y & & & = & 0 \\ x & + & 0 & + & z & = & 0 \\ & & y & + & 0 & = & 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Modifié le 23 aout 2009 (Johnny Gérard)

EXALG106 – Louvain – Juillet 2001, Série 1.

Résoudre, dans les réels, l'inéquation :

$$(x-1)\sqrt{x+4} \leq 2-4x$$

$CE : x \geq -4$

Notons

(1) que si $x \geq 1$, le premier membre est positif, le deuxième membre

doit aussi être positif $\rightarrow\ 2-4x \geq 0\ \rightarrow\ x \leq \frac{1}{2}$. Ce qui est impossible.

(2) par contre si $x \leq \frac{1}{2}$; alors le premier membre est négatif et le deuxième est positif,

l'inégalité est donc toujours vérifié.

Il nous reste donc à étudier ce qui se passe entre $\frac{1}{2}$ et 1

Si $x \leq 1$, le premier membre est négatif et en élevant au carré, il nous faut changer le sens de l'inégalité :

$(x-1)\sqrt{x+4} \leq 2-4x\ \rightarrow\ (x-1)^2(x+4) \geq (2-4x)^2$

On effectue, on réarrange et on factorise :

$\rightarrow\ x\left[x-\left(7+2\sqrt{10}\right)\right]\left[x-\left(7-2\sqrt{10}\right)\right] \geq 0$

Tableau des signes :

		0		$7-2\sqrt{10} \simeq 0.675$		$7+2\sqrt{10}$	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\left(7-2\sqrt{10}\right)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\left(7+2\sqrt{10}\right)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Compte tenu des remarques (1) et (2), la solution est donc : $\boxed{-4 \leq x \leq 7-2\sqrt{10}}$

Modifié le 23 aout 2009 (Johnny Gérard)

EXALG107 – Louvain – Juillet 2001, Série 1.

Un ascenseur circule dans un bâtiment de 14 niveaux (rez-de-chaussée + 13 étages) dont chacun a une hauteur de $h = 3\ m$ (épaisseur du plafond compris). On considère que la cabine a une hauteur égale à celle d'un étage et qu'elle se situe actuellement au rez-de-chaussée.
A un moment donné, une personne située à l'étage le plus élevé presse le bouton d'appel. Lorsque la cabine a parcouru 2 étages, la personne en question laisse tomer un boulon dans la cage d'ascenseur par une ouverture située à la *base* de la porte de l'étage où elle se trouve.
A quel moment et à quel endroit les éventuels passagers de la cabine entendront-ils l'impact du boulon sur le toit de celle-ci sachant qu'elle circule à une vitesse constante de $v = 2\ m/s$ (et sans s'arrêter aux étages intermédiaires), et que la distance d parcourue en t secondes par un objet en chute libre (on ne tient pas compte du frottement de l'air) depuis l'instant où on l'a lâché vaut :

$$d = \frac{gt^2}{2}$$

où $g = 9.81\ m/s^2$ (C'est l'accélération due à la pesanteur) et le temps t est exprimé en secondes ?

---

(1) Instant $T=0$ l'acenseur démarre.

(2) Instant $T=\frac{6}{2}=3\ s$. L'acenseur a parcouru deux étages.

Le plafond se trouve une hauteur de 9 m.

La base de l'étage le plus élevé est à une hauteur de 39 m.

(3) Le boulon et l'acenseur ont une vitesse relative : $v=2+gt$.

A cette vitesse, l'espace parcouru est : $e=2t+\frac{gt^2}{2}$; et il reste à parcourir 30 m.

$$\rightarrow\ 2t+\frac{gt^2}{2}=30\ \rightarrow\ \begin{cases}2.2776\ s\\ -2.685\ s \quad \text{A rejeter.}\end{cases}$$

(4) L'impact se fait donc à l'instant : $T=3+2.2776=5.2776\ s$

Le boulon a parcouru : $e=\frac{9.81\times 2.2776^2}{2}=25.45\ m$

Le plafond se trouve à une hauteur : $h=9+2.2776\times 2=13.55\ m$

EXALG108 – EPL, LLN, Louvain – Juillet 2001, Série 2.

Soit un polynôme de degré trois, à coefficients réels.

$$P(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$$

Déterminer tous les réels $a,\ b,\ c$ tels que le polynôme $P(x)$ admette ces mêmes nombres $a,\ b,\ c$ comme racines.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

La condition s'exprime comme suit :

$$x^3 - ax^2 + bx - c = (x-a)(x-b)(x-c)$$

Après développement du membre droit :

$$x^3 - ax^2 + bx - c = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

Identification des coefficients des puissances correspondantes :

$$\begin{cases} a &= a+b+c \\ b &= ab+bc+ca \\ c &= abc \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b &= -c \\ c &= c^2 \\ c &= -a.c^2 \end{cases}$$

Discussion :

1er cas : $\boldsymbol{c = 0}$

De la 1e équation il s'en suit que $b = 0$ et de la dernière équation que a est un réel arbitraire. Donc, tous les triplets $(a\,;b\,;c)$ appartenant à

$$\{(a\,;0\,;0) | a \in \mathbb{R}\}$$

satisfont aux conditions. En effet, le polynôme $P(x) = x^3 - ax^2 = x^2.(x-a)$ possède bien les racines a, 0 et 0, comptées avec leurs multiplicités (y compris lorsque $a = 0$).

2e cas : $\boldsymbol{c \neq 0}$

On peut simplifier un facteur c dans la 2e et la 3e équation, pour trouver :

$$\begin{cases} b &= -c \\ 1 &= c \\ 1 &= -a.c \end{cases}$$

avec comme **unique** solution $(a\,;b\,;c) = (-1\,;\,-1\,;\,+1)$.

En effet, le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2.(x-1)$ possède bien les racines -1, -1 et $+1$, comptées avec leurs multiplicités.

Réponse :

$$\boldsymbol{(a\,;b\,;c) \in \{(a\,;0\,;0) | a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-1\,;\,-1\,;\,+1)\}}$$

Modifié le 10 septembre 2009 (Johnny GERARD). Modifié le 26 décembre 2011

EXALG109 – Louvain – Juillet 2001, Série 2.

Soit m un paramètre réel. Discuter et résoudre, dans les nombres réels, le système d'inéquations que voici :

$$\begin{cases} x \leq m \\ m^2x + 2 \geq 3m \end{cases}$$

En particulier, identifier les valeurs de m pour lesquelles le système est possible.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Le système est équivalent au suivant : $\begin{cases} x \leq m \\ 3m - 2 \leq m^2.x \end{cases}$

① $\boldsymbol{m = 0}$

Le système devient : $\begin{cases} x \leq 0 \\ -2 \leq 0 \end{cases}$

La deuxième inéquation est une identité, donc la première représente la solution : $S =]-\infty\,;0]$

② $\boldsymbol{m \neq 0}$

Le système devient : $\begin{cases} x \leq m \\ \frac{3m-2}{m^2} \leq x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3m-2}{m^2} \leq x \leq m$

Cette double inégalité n'est possible que pour les valeurs du paramètre m qui sont telles que :

$$\begin{aligned} \frac{3m-2}{m^2} \leq m \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3m-2}{m^2} - m \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3m-2-m^3}{m^2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3m - 2 - m^3 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad m^3 - 3m + 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (m-1)^2.(m+2) \geq 0 \end{aligned}$$

Tableau des signes :

m		-2		$+1$	
$(m-1)^2$	+	+	+	0	+
$(m+2)$	-	0	+	+	+
m^3-3m+2	-	0	+	+	+

$\Rightarrow \ m \in [-2\,;\ \infty[\setminus\{0\}$

Résumé final :

① $m < -2$: $S = \emptyset$

② $m = -2$: $S = \{-2\}$

③ $m = 0$: $S =]-\infty\,;0]$

④ $m = 1$: $S = \{1\}$

⑤ $m \in]-2\,;0[\,\cup\,]0\,;1[\,\cup\,]1\,;\ \infty[$: $S = \left[\frac{3m-2}{m^2}\,;m\right]$

Modifié le 7 septembre 2004. Modifié le 8 septembre 2009 (Johnny GERARD). Modifié le 26 décembre 2011