Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 15

EXALG150 – EXALG159

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG150– Louvain, juillet 2003, série 1.

Résoudre, dans les nombres réels, le système suivant, lequel est constitué d'une équation et d'une inéquation :

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ \sqrt{\dfrac{y}{x}}<2 \end{cases}$$

CE : x et y doivent être de même signe et $x \neq 0$

On a : $y=\dfrac{2x-1}{3} \quad \to \quad \sqrt{\dfrac{2x-1}{3x}}<2 \quad (1)$

Ce qui rajoute une nouvelle CE :

		0		$\frac{1}{2}$	
$3x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x-1}{3x}$	$+$	$\therefore$	$-$	0	$+$

$\to \quad x<0 \quad \text{et} \quad x>\dfrac{1}{2}$

Elevons (1) au carré : $\dfrac{2x-1}{3x}<4 \quad \to \quad \dfrac{10x+1}{3x}>0$

$\to$ Le tableau :

		$-\frac{1}{10}$		0	
$3x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$20x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{10x+1}{3x}$	$+$	0	$-$	$\therefore$	$+$

Ce qui donne : $x<-\dfrac{1}{10} \quad \text{et} \quad x>\dfrac{1}{2}$

En tenant compte des CE: $\boxed{x<-\dfrac{1}{10} \quad \text{et} \quad x>\dfrac{1}{2}; \qquad y=\dfrac{2x-1}{3}}$

Résolu le 24 juin 2004

EXALG151– Louvain, juillet 2003, série 1.

On considère l'équation suivante, dans laquelle p est un paramètre réel et i représente l'unité imaginaire :

$$z^2 - 4(2+i)z + p(3+4i) = 0$$

1) Calculer les racines de cette équation,sous la forme $a + bi$, en fonction du paramètre p.

2) Déterminer p pour que le carré du module de chacune des racines soit égal à 65 (la même valeur pour les deux racines).

Rappel : le module de $a + bi$ est égal *à* $\sqrt{a^2+b^2}$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

(1) Calcul des racines en fonction du paramètre p :

Le discriminant du trinôme de l'équation (1) est :

$$\begin{aligned}\Delta &= 16(2+i)^2 - 4p(3+4i)\\ &= 16(4+4i-1) - 12p - 16pi\\ &= 12(4-p) + 16(4-p)i\end{aligned}$$

Calcul de la racine carrée du discriminant :

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta} = x + yi \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 2xyi - y^2 = \Delta\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 12(4-p)\\ 2xy = 16(4-p)\end{cases}\\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} (x^2-y^2)^2 = 144(4-p)^2\\ 4x^2y^2 = 256(4-p)^2\end{cases}\\ &\Rightarrow \quad (x^2+y^2)^2 = 400(4-p)^2\\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20|4-p|\\ x^2 - y^2 = 12(4-p)\end{cases}\end{aligned}$$

Discussion :

(a) $p < 4$: $\begin{cases} x^2+y^2 = 20(4-p)\\ x^2-y^2 = 12(4-p)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16(4-p)\\ y^2 = 4(4-p)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 4\sqrt{4-p}\\ y = \pm 2\sqrt{4-p}\end{cases}$

x et y sont de même signe

$\Delta = \pm 2\sqrt{4-p}(2+i)$

$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(4(2+i) \pm 2\sqrt{4-p}(2+i)\right) = \left(2 \pm \sqrt{4-p}\right)(2+i)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{z_1 = 2\left(2+\sqrt{4-p}\right) + i.\left(2+\sqrt{4-p}\right)}\\ \boldsymbol{z_2 = 2\left(2-\sqrt{4-p}\right) + i.\left(2-\sqrt{4-p}\right)}\end{cases} \qquad (2)$$

(b) $\boldsymbol{p = 4}$: $\Delta = 0$ et $\boldsymbol{z_1 = z_2 = 4 + 2i}$ (3)

(c) $\boldsymbol{p > 4}$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20(p-4) \\ x^2 - y^2 = -12(p-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4(p-4) \\ y^2 = 16(p-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{p-4} \\ y = \pm 4\sqrt{p-4} \end{cases}$

x et y sont de signes opposés

$\Delta = \pm 2\sqrt{p-4}(1-2i)$

$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(4(2+i) \pm 2\sqrt{p-4}(1-2i)\right) = \left(4 \pm \sqrt{p-4}\right) + i.\left(2 \mp 2\sqrt{p-4}\right)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{z_1 = \left(4 + \sqrt{p-4}\right) + 2i.\left(1 - \sqrt{p-4}\right)} \\ \boldsymbol{z_2 = \left(4 - \sqrt{p-4}\right) + 2i.\left(1 + \sqrt{p-4}\right)} \end{cases} \qquad (4)$$

(2) Détermination de la valeur de $\boldsymbol{p}$ pour laquelle $\boldsymbol{|z_1|^2 = |z_2|^2 = 65}$:

Si $\boldsymbol{p \leq 4}$, alors : $|z_{1,2}|^2 = 4\left(2 \pm \sqrt{4-p}\right)^2 + \left(2 \pm \sqrt{4-p}\right)^2 = 5\left(4 \pm 4\sqrt{4-p} + 4 - p\right)$

$= 5\left(8 - p \pm 4\sqrt{4-p}\right)$

Par conséquent, $|z_1|^2 = |z_2|^2$ n'est possible que dans le cas où $p = 4$, mais dans ce cas on a que $|z_1|^2 = |z_2|^2 = 20 \neq 65$.

Si $\boldsymbol{p > 4}$, alors : $|z_{1,2}|^2 = \left(4 \pm \sqrt{p-4}\right)^2 + \left(2 \mp 2\sqrt{p-4}\right)^2$

$= 16 \pm 8\sqrt{p-4} + p - 4 + 4 \mp 8\sqrt{p-4} + 4p - 16$

$= 5p$

Par conséquent, $|z_1|^2 = |z_2|^2$ pour **toute** valeur de $p > 4$.

$|z_1|^2 = |z_2|^2 = 5p = 65$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p = 13}$

Contrôle : calcul des racines de l'équation avec $\boldsymbol{p = 13}$

$z^2 - 4(2+i)z + 13(3+4i) = 0$

$\Delta = 16(2+i)^2 - 52(3+4i) = -36(3+4i)$

$$\sqrt{\Delta} = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -108 \\ 2xy = -144 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 = 11664 \\ 4x^2y^2 = 20736 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 32400$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 180 \\ x^2 - y^2 = -108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 36 \\ y^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 6 \\ y = \pm 12 \end{cases}$$

et x et y ont des signes opposés

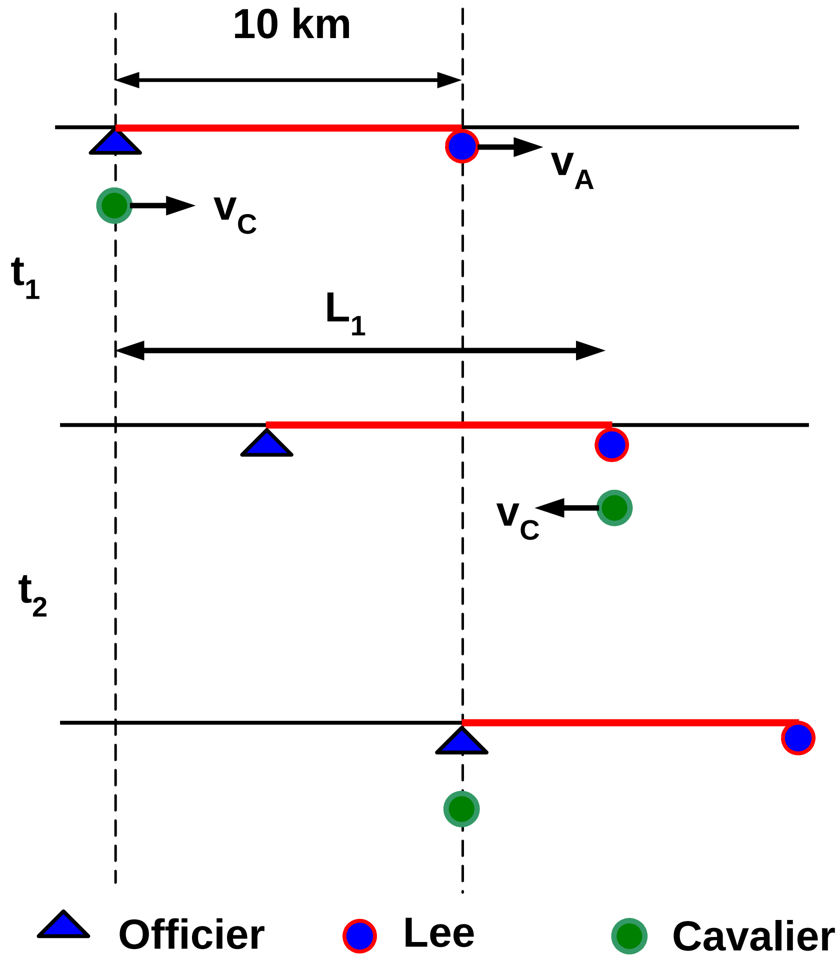
$$\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = \pm(6 - 12i)$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(4(2+i) \pm (6 - 12i)\right) \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = 1 + 8i \end{cases} \quad \begin{matrix} |z_1|^2 = 49 + 16 = 65 \\ |z_2|^2 = 1 + 64 = 65 \end{matrix}$$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 17 juillet 2011 (E Houdart). Modifié le 26 décembre 2011.

EXALG152– Louvain, juillet 2003, série 1.

L’armée du général Lee marchait d’un pas paisible et s’étirait sur dix kilomètres. Lee n’était pas tranquille, car il devait traverser un défilé dans lequel il avait perdu ses trois précédentes armées. Aussi avait-il commandé à l’officier placé à l’arrière du convoi de lui envoyer un cavalier un message dès que le dernier homme serait sorti du défilé. Tout alla bien cette fois et l’officier envoya un cavalier avertir Lee (qui se trouvait en tête de l’armée). Lorsque le cavalier rejoignit l’officier à l’arrière-garde pour lui dire qu’il avait accompli sa mission, cet officier se trouvait à l’endroit où était passée la tête de l’armée lors du départ du cavalier. On demande la *longueur du trajet parcouru par le cavalier*. Préciser les notations choisies et indiquer clairement les différentes étapes du raisonnement.



Soit : $\begin{cases} v_A : \text{ la vitesse de déplacement de l'armée} \\ v_C : \text{ La vitesse de déplacement du cavalier} \\ t_1 : \text{le temps mis par le cavalier pour rejoindre Lee} \\ t_2 : \text{ le temps mis par le cavalier pour revenir près de l'officier.} \end{cases}$

On a : $\begin{cases} v_A(t_1+t_2)=10 & (1) \\ v_C t_1 = L_1 & (2) \\ v_C t_2 = L_1 - 10 & (3) \\ L_1 = 10 + v_A t_1 & (4) \end{cases}$

de (1) et (2), $L_1 - 10 + v_A t_2 = 10 \rightarrow v_A t_2 = 20 - L_1 \qquad (5)$

de (2) et (3), $t_2 = t_1 \dfrac{L_1 - 10}{L_1} \qquad (6)$

de (5) et (6), $v_A t_1 \dfrac{L_1 - 10}{L_1} = 20 - L_1 \qquad (7)$

de (4) et (7), $\dfrac{(L_1 - 10)^2}{L_1} = 20 - L_1 \quad \rightarrow \quad 2L_1^{\ 2} - 40L_1 + 100 = 0$

$\rightarrow \quad L_1 = 10 + \sqrt{50} \qquad (8)$

$\rightarrow$ de (3) et (8), $v_C t_2 = \sqrt{50}$

La distance parcourue par le cavalier est donc $\boxed{10 + 2\sqrt{50}\ km}$

Résolu le 24 juin 2004

EXALG153– Louvain, juillet 2003, série 2.

Soit a un paramètre réel. Discuter et résoudre, dans les nombres réels, le système d'équations que voici :

$$\begin{cases} e^x + 2e^y = a \\ e^{2x} - 4e^{2y} = e^y \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x + 2e^y = a \\ e^{2x} - 4e^{2y} = e^y \end{cases} \qquad \text{CE} : a > 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} e^x + 2e^y = a \\ \left(e^x + 2e^y\right)\left(e^x - 2e^y\right) = e^y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^x + 2e^y = a \\ a\left(e^x - 2e^y\right) = e^y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} e^x + e^y = a \\ ae^x - \left(2a+1\right)e^y = 0 \end{cases}$$

Le Δ de ce système est : $\Delta = -4a - 1$ qui n'est jamais nul puisque $a > 0$

$$\rightarrow \begin{cases} e^x = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & -\left(2a+1\right) \end{vmatrix}}{-4a-2} = \dfrac{a\left(2a+1\right)}{4a+1} \\ e^x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{vmatrix}}{-4a-2} = \dfrac{a^2}{4a+1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \ln \dfrac{a\left(2a+1\right)}{4a+1} \\ y = \ln \dfrac{a^2}{4a+1} \end{cases}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXALG154 – EPL – UCL - Louvain, juillet 2003, série 2.

Déterminer le(s) polynôme(s) $P(x)$ de degré 6 ayant les propriétés suivantes :

-1- Le coefficient de x^6 dans $P(x)$ est égal à 1
-2- Les coefficients de x^3 et de x^4 dans $P(x)$ sont égaux
-3- $P(x)$ est divisible par x^2+x+1 et par x^2-x+1
-4- Le polynôme $\dfrac{P(x)}{x^2+x+1}-\dfrac{P(x)}{x^2-x+1}$ est divisible par x^2-x

Ensuite, calculer toutes les racines complexes de $P(x)$, y compris les racines réelles, bien sûr.

En vertu de (1) et (2), le polynôme peut s'écrire :

$P(x) = x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_4 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x^2 + x + 1$

x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	$x^2 + x + 1$
1	a_5	a_4	a_4	a_2	a_1	a_0	x^4
$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$					$+(a_5-1)x^3$
0	a_5-1	a_4-1					$+(a_4-a_5)x^2$
	$\underline{a_5-1}$	$\underline{a_5-1}$	$\underline{a_5-1}$				$+x$
	0	a_4-a_5	a_4-a_5+1				$+(a_2-a_4+a_5-1)$
		$\underline{a_4-a_5}$	$\underline{a_4-a_5}$	$\underline{a_4-a_5}$			
		0	1	$a_2-a_4+a_5$			
			$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$		
			0	$a_2-a_4+a_5-1$	a_1-1		
				$\underline{a_2-a_4+a_5-1}$	$\underline{a_2-a_4+a_5-1}$	$\underline{a_2-a_4+a_5-1}$	
				0	$a_1-a_2+a_4-a_5$	$a_0-a_2+a_4-a_5+1$	

$$\to P(x) = (x^2+x+1)\left(x^4+(a_5-1)x^3+(a_4-a_5)x^2+x+(a_2-a_4+a_5-1)\right)$$
$$+(a_1-a_2+a_4-a_5)x+a_0-a_2+a_4-a_5+1$$

De même effectuons la division euclidienne par $x^2 - x + 1$

x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	$x^2 - x + 1$
1	a_5	a_4	a_4	a_2	a_1	a_0	x^4
$\underline{1}$	$\underline{-1}$	$\underline{1}$					$+(a_5+1)x^3$
0	a_5+1	a_4-1					$+(a_4+a_5)x^2$
	$\underline{a_5+1}$	$\underline{-(a_5+1)}$	$\underline{a_5+1}$				$+(2a_4-1)x$
	0	a_4+a_5	a_4-a_5-1				$+(a_2+a_4-a_5-1)$
		$\underline{a_4+a_5}$	$\underline{-(a_4+a_5)}$	$\underline{a_4+a_5}$			
		0	$2a_4-1$	$a_2-a_4-a_5$			
			$\underline{2a_4-1}$	$\underline{-(2a_4-1)}$	$\underline{(2a_4-1)}$		
			0	$a_2+a_4-a_5-1$	a_1-2a_4+1		
				$\underline{a_2+a_4-a_5-1}$	$\underline{-(a_2+a_4-a_5-1)}$	$\underline{a_2+a_4-a_5-1}$	
				0	$a_1-a_4+a_2-a_5$	$a_0-a_2-a_4+a_5+1$	

$$\to P(x) = (x^2-x+1)\left(x^4+(a_5+1)x^3+(a_4+a_5)x^2+(2a_4-1)x+(a_2+a_4-a_5-1)\right)$$
$$+(a_1-a_4+a_2-a_5)x+(a_0-a_2-a_4+a_5+1)$$

Le polynôme $G(x)=\dfrac{P(x)}{x^2+x+1}-\dfrac{P(x)}{x^2-x+1}$ est

$G(x)=-2x^3-2a_5x^2+(-2a_4+2)x+2a_5-2a_4$

Efectuons la division euclidienne par x^2-x

$$
\begin{array}{cccc|c}
x^3 & x^2 & x & x^0 & x^2-x \\
\hline
-2 & -2a_5 & -2a_4+2 & +2a_5-2a_4 & -2x \\
\underline{-2} & \underline{+2} & & & -2(a_5+1) \\
0 & -2a_5-2 & & & \\
 & \underline{-2a_5-2} & \underline{+2a_5+2} & & \\
 & 0 & -2(a_4+a_5) & 2a_5-2a_4 &
\end{array}
$$

$\to G(x)=(x^2-x)(-2x-2(a_5+1))+-2(a_4+a_5)x+2(a_5-a_4)$

Puisque les restes de toutes ces divisions sont nulles, on en déduit le système suivant

eq	a_5	a_4	a_2	a_1	a_0	X
1	-1	1	-1	1		0
2	-1	1	-1		1	-1
3	-1	-1	1	1		0
4	1	-1	-1		1	-1
5	1	1				0
6	1	-1				0

Ce système est très facile à résoudre

$\to\ a_5=a_4=a_2=a_1=0$ et $a_0=-1\ \to\ \boxed{P(x)=x^6-1}$

Résolvons $P(x)$: $x^6=1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi\to x=\cos\dfrac{k\pi}{3}+i\dfrac{\sin k\pi}{3}$

k	x
0	1
1	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
2	$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
3	-1
4	$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
5	$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Détermination du polynôme

En tenant compte des conditions (1) et (3), le polynôme peut s'écrire comme suit :

$$P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + ax + b) \qquad \text{(a)}$$

Pour exprimer la condition (2), effectuons d'abord les multiplications dans (a) :

$$\begin{aligned} P(x) &= \left((x^2+1)^2 - x^2\right)(x^2 + ax + b) \\ &= (x^4 + x^2 + 1)(x^2 + ax + b) \\ &= x^6 + ax^5 + (b+1)x^4 + ax^3 + (b+1)x^2 + ax + b \end{aligned}$$

La condition (2) implique donc que $b + 1 = a \Leftrightarrow b = a - 1$; le polynôme peut donc s'écrire sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + ax + a - 1) \qquad \text{(b)}$$

$$P(x) = x^6 + ax^5 + ax^4 + ax^3 + ax^2 + ax + a - 1 \qquad \text{(c)}$$

En utilisant l'écriture (b) du polynôme, le polynôme $Q(x) = \frac{P(x)}{x^2+x+1} - \frac{P(x)}{x^2-x+1}$ est égal à :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x^2 + x + 1)(x^2 + ax + a - 1) - (x^2 - x + 1)(x^2 + ax + a - 1) \\ &= -2x(x^2 + ax + a - 1) \end{aligned}$$

Pour que $Q(x)$ soit divisible par $x^2 - x$, il faut qu'il soit divisible par x, ce qu'il est, et par $x - 1$:

$$Q(1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -2(1 + 2a - 1) = 0 \qquad a = 0$$

Le polynôme recherché est donc :

$$\boldsymbol{P(x) = x^6 - 1}$$

Calcul des racines

Selon (b) avec $a = 0$, le polynôme s'écrit comme :

$$P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 1)$$

Racines du 1er facteur : $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i.\sqrt{3})$

Racines du 2e facteur : $x_{3,4} = \frac{1}{2}(+1 \pm i.\sqrt{3})$

Racines du 3e facteur : $x_{5,6} = \pm 1$

$$\boldsymbol{S = \left\{\frac{1}{2}(-1 + i.\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1 - i.\sqrt{3}), \frac{1}{2}(+1 + i.\sqrt{3}), \frac{1}{2}(+1 - i.\sqrt{3}), +1, -1\right\}}$$

(Ce sont les six racines sixièmes complexes de +1)

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 7 septembre. Modifié le 26 décembre 2011

EXALG155– EPL, UCL, Louvain, juillet 2003, série 2.

Soit c un paramètre réel.

Discuter et résoudre, dans les nombres réels, l'équation suivante.

$$\sqrt{x-(c-1)^2}-\sqrt{4x-1}=\sqrt{x-c^2}$$

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

$$\sqrt{x-(c-1)^2}-\sqrt{4x-1}=\sqrt{x-c^2} \rightarrow \sqrt{x-(c-1)^2}=\sqrt{x-c^2}+\sqrt{4x-1}$$

Les CE sont : 1) $(c-1)^2 \leq x$, 2) $c^2 \leq x$, 3) $\frac{1}{4} \leq x$

Les deux membres sont positifs. Nous élevons au carré.

$$\cancel{x}-(c-1)^2=\cancel{x}-c^2+2\sqrt{(x-c^2)(4x-1)}+4x-1$$

$$\cancel{-c^2}+2c\cancel{-1}=\cancel{-c^2}+2\sqrt{(x-c^2)(4x-1)}+4x\cancel{-1}$$

$c-2x=\sqrt{(x-c^2)(4x-1)}$ D'où une quatrième CE : 4) $x \leq \frac{c}{2}$

Elevons denouveau au carré :

$$\cancel{c^2}-4cx+\cancel{4x^2}=\cancel{4x^2}-4c^2x-x+\cancel{c^2} \rightarrow +4c^2x+x-4cx=0$$

$$\rightarrow (2c-1)^2 x=0$$

Si $c \neq \frac{1}{2}$ alors $x=0$ ce qui est impossible en vertu de la CE 3)

Si $c=\frac{1}{2}$ alors $\begin{cases} \text{1) devient } \frac{1}{4} \leq x \\ \text{2) devient } \frac{1}{4} \leq x \\ \text{3) devient } \frac{1}{4} \leq x \\ \text{4) devient } x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$ D'où $x=\frac{1}{4}$

<u>Conclusion</u>

Si $c \neq \frac{1}{2}$ alors $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$

Si $c=\frac{1}{2}$ alors $S=\varnothing$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 5 septembre 2010

EXALG156– EPL, UCL, Louvain, juillet 2003, série 2.

Deux cyclistes, A et B, n'ayant à leur disposition qu'une bicyclette ont à parcourir ensemble, en un temps égal à 188/63 h, une certaine distance mesurée par un nombre entier pair de km. Ils conviennent de monter à tour de rôle et de km en km sur la machine qui est laissée à chaque borne kilométrique jusqu'à l'arrivée de celui qui marche à pied. A et B partent en même temps. B monte le premier et sa vitesse à bicyclette est le double de sa vitesse de marche à pied ; la vitesse de A à bicyclette est la même que celle de B. Les deux hommes se retrouvent au même moment au kilomètre sept ; ils estiment alors nécessaire d'augmenter leur vitesse et ils conviennent de la faire en marchant ½ km de plus par heure. C'est encore B qui monte le premier mais cette fois-ci sa vitesse à bicyclette est le double de la vitesse de A marchant à pied ; A à bicyclette a encore la même vitesse que B. Les deux hommes arrivent à destination au même moment. On demande la *distance parcourue*. Préciser les notations choisies et indiquer clairement les différentes étapes du raisonnement :

- (i) mise en équation ;
- (ii) méthode de résolution ;
- (iii) calcul effectif de la solution (s'il reste du temps).

Désignons par :

V_{AB} = La vitesse pendant la première étape de A à bicyclette

V_{AM} = La vitesse de marche de A pendant la première étape

V'_{AB} = La vitesse pendant la deuxième étape de A à bicyclette

V'_{AM} = La vitesse de marche de A pendant la deuxième étape

On désignera les vitesses correspondantes pour B, en remplaçant A par B.

Soit encore t les sous-temps de la première étape :

Example: t_{AM} temps de marche de A

Soit encore t' les sous-temps de la deuxième étape pour faire $\underline{\underline{1\text{ km}}}$

Example: t'_{AM} = le temps nécessaire pour que A fasse $\underline{\underline{1\text{ km}}}$ en marchant.

Soit finalement : t_7 le temps pour parcourir la première étape

t le temps pour parcourir le deuxième étape

T le temps total

$$\text{On a : } \begin{cases} V_{BB} & \left(\text{Nous exprimerons les autres variables en fonction de } V_{BB}\right) \\ V_{BM} = \dfrac{1}{2} V_{BB} & \\ V_{AB} = V_{BB} & \\ V_{AM} = \dfrac{4}{7} V_{BB} & (1) \end{cases}$$

(1) En effet, $t_7 = t_{AB} + t_{AM} = t_{BB} + t_{BM}$

Puisque A parcourt 3 km, et B 4 km

$$\frac{3}{V_{AB}}+\frac{4}{V_{AM}}=\frac{4}{V_{BB}}+\frac{3}{V_{BM}} \rightarrow \frac{3}{V_{BB}}+\frac{4}{V_{AM}}=\frac{4}{V_{BB}}+\frac{6}{V_{BB}} \rightarrow V_{AM}=\frac{4}{7}V_{BB}$$

Pour la deuxième étape, on a

$$\begin{cases} V'_{BB}=2\left(\frac{4}{7}V_{BB}+\frac{1}{2}\right) & (2) \\ V'_{BM}=V_{BM}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(V_{BB}+1) & \\ V'_{AB}=V'_{BB}=2\left(\frac{4}{7}V_{BB}+\frac{1}{2}\right) & (3) \\ V'_{AM}=V_{AM}+\frac{1}{2}=\frac{4}{7}V_{BB}+\frac{1}{2} & \end{cases}$$

(2) et (3) car $V'_{BB}=2V'_{AM}=2\left(\frac{4}{7}V_{BB}+\frac{1}{2}\right)$

Au total, A et B vont parcourir un nombre entier pair de km.

Comme B démarre la deuxième étape, il faut donc que A arrive en marchant au point de rencontre.

Soit n le nombre de km que A va faire en marchant pendant la deuxième étape.

On a , puisque A et B arrivent en même temps:

$$n.t'_{AM}+(n-1).t'_{AB}=(n-1).t'_{BM}+n.t'_{BB}$$

$$\frac{n}{V'_{AM}}+\frac{n-1}{V'_{AB}}=\frac{n-1}{V'_{BM}}+\frac{n}{V'_{BB}}$$

$$\frac{n}{\frac{4}{7}V_{BB}+\frac{1}{2}}+\frac{n-1}{2\left(\frac{4}{7}V_{BB}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{n-1}{\frac{1}{2}(V_{BB}+1)}+\frac{n}{2\left(\frac{4}{7}V_{BB}+\frac{1}{2}\right)}$$

Après calcul : $V_{BB}=\frac{7}{2n-9}$

Le temps mis pour parcourir la première étape est :

$$t_7=t_{BB}+t_{BM}=\frac{4}{V_{BB}}+\frac{3}{V_{BM}}=\frac{10}{V_{BB}}$$

Le temps mis pour faire la deuxième étape est :

$$t=(n-1)t'_{BM}+n.t'_{BB}=\frac{n-1}{V'_{BM}}+\frac{n}{V'_{BB}}=\frac{2(n-1)}{V_{BB}+1}+\frac{n}{2\left(\frac{4}{7}V_{BB}+\frac{1}{2}\right)}$$

Le temps total est de $T=t_7+t=\frac{188}{63}h \rightarrow \frac{10}{V_{BB}}+\frac{2(n-1)}{V_{BB}+1}+\frac{n}{2\left(\frac{4}{7}V_{BB}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{188}{63}$

On remplace V_{BB}, et on développe :

$$\frac{10}{V_{BB}}+\frac{2(n-1)}{V_{BB}+1}+\frac{n}{2(\frac{4}{7}V_{BB}+\frac{1}{2})}=\frac{188}{63}\Leftrightarrow\frac{10}{\frac{7}{2n-9}}+\frac{2(n-1)}{\frac{7}{2n-9}+1}+\frac{n}{2(\frac{4}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{7}}{2n-9}+\frac{1}{2})}=\frac{188}{63}\Leftrightarrow$$

$$\frac{10}{\frac{7}{2n-9}}+\frac{2(n-1)}{\frac{7+(2n-9)}{2n-9}}+\frac{n}{2(\frac{4}{2n-9}+\frac{1}{2})}=\frac{188}{63}\Leftrightarrow\frac{10(2n-9)}{7}+\frac{2(n-1)(2n-9)}{2n-2}+\frac{n}{\cancel{2}[\frac{8+(2n-9)}{\cancel{2}(2n-9)}]}=\frac{188}{63}\Leftrightarrow$$

$$\frac{10(2n-9)}{7}+\frac{2(n-1)(2n-9)}{2(n-1)}+\frac{n(2n-9)}{2n-1}=\frac{188}{63}\Leftrightarrow\frac{10(2n-9)}{7}+(2n-9)+\frac{n(2n-9)}{2n-1}=\frac{188}{63}\Leftrightarrow$$

$$\frac{10(2n-9)(2n-1)+7(2n-9)(2n-1)+7n(2n-9)}{7(2n-1)}=\frac{188}{63}\Leftrightarrow$$

$$\frac{10(4n^2-20n+9)+7(4n^2-20n+9)+(14n^2-63n)}{7(2n-1)}=\frac{188}{63}\Leftrightarrow$$

$$\frac{(40n^2-200n+90)+(28n^2-140n+63)+(14n^2-63n)}{7(2n-1)}=\frac{188}{63}\Leftrightarrow$$

$$\frac{82n^2-403n+153}{2n-1}=\frac{188}{9}\Leftrightarrow 9(82n^2-403n+153)=188(2n-1)\Leftrightarrow 738n^2-3627n+1377=376n-188\Leftrightarrow$$

$$\boxed{738n^2-4003n+1565=0.}$$

Le réalisant de cette équation est égal à $11404129=3377^2$ *et ses solutions sont* :

$$\boxed{n_{1,2}=\frac{4003\pm 3377}{1476}=5 \;\; et \;\; \frac{313}{738}\cong 0,424119...}$$

$\rightarrow n=5$

Finalement, on calcule

$$\begin{cases} V_{BB}=7\ km/h \\ V_{BM}=\frac{7}{2}km/h \\ V_{AB}=7\ km/h \\ V_{AM}=4\ km/h \\ t_7=\frac{10}{7}\ h \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V'_{BB}=9\ km/h \\ V'_{BM}=4\ km/h \\ V'_{AB}=9\ km/h \\ V'_{AM}=\frac{9}{2}\ km/h \\ t=\frac{14}{9}\ h \end{cases}$$

$\boxed{\text{La distance parcourue est : } 7+5+4=16\ km}$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 17 septembre 2008 (Pierre Bernimont)

EXALG157– EPL, UCL, Louvain, septembre 2003.

Considérons l'équation suivante, dans laquelle k est un paramètre réel :

$$(k-1)^2 x^2 - (k^2-1)x + 2k = 0$$

Montrer que, si elle admet deux racines réelles, alors une de ces racines est le sinus et l'autre le cosinus d'un même angle. Ensuite, donner les valeurs de cet angle en fonction de k.

On notera la CE : $k \neq 1$

Si l'une des racines est sinus d'un angle et l'autre cosinus du même angle, alors

$x_1^2 + x_2^2 = 1$ puisque $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

Soit l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$. Il est facile de montrer que si x_1 et x_2 sont les deux racines, on a : $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$

En effet, $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b}{2a} - \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_1 = \dfrac{-b}{2a} + \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \dfrac{b^2-ac}{4a^2} \\ x_1^2 = \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \dfrac{b^2-ac}{4a^2} \end{cases}$

$$\rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^2-ac}{2a^2} = \frac{b^2-ac}{a^2}$$

Appliquons cette formule à notre équation:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{(k^2-1)^2 - 4k(k-1)^2}{(k-1)^4} = 1$$

Donc les racines sont le sinus et le cosinus d'un même angle.

$$\text{On a : } x = \frac{(k^2-1) \pm \sqrt{(k^2-1)^2 - 8k(k-1)^2}}{2(k-1)^2} = \frac{k+1 \pm \sqrt{k^2-6k+1}}{2(k-1)}$$

Avec les conditions :$\Delta \geq 0 \rightarrow k^2 - 6k + 1 \geq 0 \rightarrow k \leq 3 - 2\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2} \geq k$

Discussion

Il nous faut encore déterminer à quel(s) quadrant(s) appartient l'angle cherché φ:

Etudions les signes des racines qui sont donnés par :

$$\begin{cases} x_1.x_2 = 2k & \text{(le terme indépendant)} \\ x_1 + x_2 = k^2 - 1 & (-\text{ le coefficient de } x) \end{cases}$$

$a)$ $\underline{k > 1}$

C'est-à-dire en fait, $k > 3 + 2\sqrt{2}$. Alors, x_1 et x_2 sont positifs

$\rightarrow \varphi$ est situé dans le premier quadrant, et on a

$$\varphi = \begin{cases} \arcsin \dfrac{k+1 \pm \sqrt{k^2 - 6k + 1}}{2(k-1)} + 2t\pi & t \in \mathbb{Z} \\ \text{ou bien} \\ \arccos \dfrac{k+1 \pm \sqrt{k^2 - 6k + 1}}{2(k-1)} + 2t\pi & t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Appelons cet angle du premier quadrant : φ_1

$b)$ $\underline{0 < k < 1}$

C'est-à-dire en fait, $0 \le k \le 3 - 2\sqrt{2} \simeq 0.1715$. Alors, x_1 et x_2 sont négatifs

$\rightarrow \varphi$ est situé dans le troisième quadrant. Appelons le φ_3, et on a : $\varphi_3 = \pi + \varphi_1$

$c)$ $\underline{k = 0}$

$\rightarrow$ Par exemple : $x_1 = 0$ et $x_2 = -1$

$$\rightarrow \begin{cases} \varphi = \pi + 2t\pi \\ \varphi = \dfrac{3\pi}{2} + 2t\pi \end{cases}$$

$d)$ $\underline{k < 0}$

Les racines sont de signes contraires et φ appartient au deuxième ou au quatrième quadrant, et on a $\begin{cases} \varphi_2 = \pi - \varphi_1 \\ \varphi_4 = -\varphi_1 \end{cases}$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

CE : $\boldsymbol{k \neq 1}$

(a) Il s'agit d'une équation du second degré dans les nombres réels. Dans le cas où elle admet deux racines réelles x_1 et x_2 , leur somme et leur produit sont :

$$x_1 + x_2 = \frac{k^2-1}{(k-1)^2} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{2k}{(k-1)^2}$$

On peut alors calculer la somme de leurs carrés comme suit :

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = \frac{(k+1)^2-4k}{(k-1)^2} = \frac{k^2-2k+1}{(k-1)^2} = 1$$

Donc :

$$\boldsymbol{\exists\, \varphi \in \mathbb{R} \parallel x_1 = \sin\varphi \;\&\; x_2 = \cos\varphi}$$

et $\boldsymbol{\exists\, \theta \in \mathbb{R} \parallel x_1 = \cos\theta \;\&\; x_2 = \sin\theta}$

avec $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi}$

(b) Détermination de $\boldsymbol{\varphi}$ en fonction de $\boldsymbol{k}$:

$$x_1.x_2 = \frac{2k}{(k-1)^2} \iff \sin\varphi.\cos\varphi = \frac{2k}{(k-1)^2} \iff \sin 2\varphi = \frac{4k}{(k-1)^2}$$

$$\iff \boldsymbol{\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\left(\frac{4k}{(k-1)^2}\right) + 2n\pi} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varphi = \pi - \frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}\left(\frac{4k}{(k-1)^2}\right) + 2n\pi} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Discussion :

La condition sur k est que :

$$-1 \leq \frac{4k}{(k-1)^2} \leq +1$$

Inégalité de droite :

$$\frac{4k}{(k-1)^2} \leq +1 \iff \frac{4k}{(k-1)^2} - 1 \leq 0 \iff \frac{4k-(k^2-2k+1)}{(k-1)^2} \leq 0 \iff \frac{k^2-6k+1}{(k-1)^2} \geq 0$$

$$\iff k^2 - 6k + 1 \geq 0$$

Calcul des racines de ce trinôme :

$$\Delta = 36 - 4 = 32 = 16.2 \qquad \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{2} \qquad k_{1,2} = \frac{1}{2}\left(6 \pm 4\sqrt{2}\right) = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

L'inégalité de droite est donc satisfaite si

$$k \in \left]-\infty\,; 3 - 2\sqrt{2}\right] \cup \left[3 + 2\sqrt{2}\,;\, +\infty\right[\;\cong\;]-\infty\,; 1{,}172] \cup [5{,}828\,;\, +\infty[$$

Inégalité de gauche :

$$\frac{4k}{(k-1)^2} \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4k}{(k-1)^2} + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4k+\left(k^2-2k+1\right)}{(k-1)^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(k+1)^2}{(k-1)^2} \geq 0$$

ce qui est toujours vrai si $k \neq 1$.

La condition sur k est donc que :

$$\boldsymbol{k} \in \left]-\infty\,; \mathbf{3 - 2\sqrt{2}}\right] \cup \left[\mathbf{3 + 2\sqrt{2}}\,;\, +\infty\right[\;\cong\; \left]-\infty\,; \mathbf{1,172}\right] \cup \left[\mathbf{5,828}\,;\, +\infty\right[$$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 7 septembre 2004

EXALG158– EPL, UCL, Louvain, septembre 2003.

Résoudre, dans les nombres réels, l'inéquation suivante :

$$|\,x\,|^{2\log_2(8|x|)} \geq 64\,x^5$$

$$|\,x\,|^{2\log_2(8|x|)} \geq 64\,x^5$$

$$\text{CE : } x \neq 0$$

$$\text{Si } x < 0 \quad \text{l'équation est toujours vérifiée.}$$

$$\text{Il reste donc à étudier pour } x > 0$$

$$\rightarrow 2\log_2 8x\,.\log_2 x \geq \log_2 64 + 5\log_2 x$$

$$\rightarrow 2\left(\log_2 2^3 + \log_2 x\right).\log_2 x \geq \log_2 2^6 + 5\log_2 x$$

$$\rightarrow 2\left(3 + \log_2 x\right).\log_2 x \geq 6 + 5\log_2 x$$

$$\rightarrow 2\log_2 x + \log_2 x - 6 \geq 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \log_2 x = \dfrac{3}{2} & \rightarrow \quad x = 2\sqrt{2} \\ \log_2 x = -2 & \rightarrow \quad x = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{x \leq \frac{1}{4}, \quad x \geq 2\sqrt{2} \quad \text{avec} \quad x \neq 0}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXALG159– EPL, UCL, Louvain, Louvain, septembre 2003.

Soit m un paramètre réel. Résoudre et discuter, dans les nombres réels, les systèmes d'équations que voici :

$$\begin{cases} 2mx+(m+1)y-(m+3)=0 \\ (3x+(m+1)y-1)^2-(x-(m-1)y+3)^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2mx+(m+1)y-(m+3)=0 \\ (3x+(m+1)y-1)^2-(x-(m-1)y+3)^2=0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 2mx+(m+1)y-(m+3)=0 \\ \left[3x+(m+1)y-1+x-(m-1)y+3\right]\left[3x+(m+1)y-1-(x-(m-1)y+3)\right]=0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 2mx+(m+1)y=m+3 \\ 4(2x+y+1)(x+my-2)=0 \end{cases}$$

On arrive donc à devoir étudier deux systèmes

1) $\begin{cases} 2mx+(m+1)y=m+3 \\ x+my=2 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2m & m+1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)(2m+1)$$

a) $\underline{m=1}$ Le système devient

$\begin{cases} 2x+2y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \to \quad y=2-x$ Système simplement indeterminé

Revenons au système initial. Remplacons $m=1$

$$\begin{cases} 2x+2y-4=0 \\ (3x+2y-1)^2-(x+3)^2=0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x+y-2=0 \\ (2x+y+1)(x+y-2)=0 \end{cases}$$

Notons que la deuxième équation, peut s'interpréter comme une conique dégénérée en deux droites.

$b)$ $\underline{m = -\frac{1}{2}}$ Le système devient

$$\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{2} \\ x - \frac{1}{2}y = 2 \end{cases} \rightarrow \text{ Système impossible.}$$

$c)$ Dans les autres cas

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m+3 & m+1 \\ 2 & m \end{vmatrix}}{(m-1)(2m+1)} = \frac{m+2}{2m+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2m & m+3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{(m-1)(2m+1)} = \frac{3}{2m+1}$$

2) $\begin{cases} 2mx + (m+1)y = m+3 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2m & m+1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} m+3 & m+1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -m-2$$

$$y = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2m & m+3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2m+3$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Le « *truc* » dans cet exercice c'est de réaliser que l'équation (2) est de la forme $a^2 - b^2 = 0$. Elle peut donc être transformée en $(a+b)(a-b) = 0$. Ainsi, le système (I) est équivalent à :

$$(\mathrm{I}') \quad \begin{cases} 2mx + (m+1)y & = & m+3 \\ (4x + 2y + 2)(2x + 2my - 4) & = & 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système, et donc du système de départ, est l'**union** des solutions des deux systèmes suivants :

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} 2mx + (m+1)y & = & m+3 \\ 2x + y & = & -1 \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} 2mx + (m+1)y & = & m+3 \\ x + my & = & 2 \end{cases}$$

Discussion et résolution du système (II) :

$$\det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} 2m & m+1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2m - 2m - 2 = -2 \quad (\neq 0)$$

Le système est donc **déterminé** pour toute valeur de $m \in \mathbb{R}$. Sa solution peut être calculée par la règle de Cramer :

$$\det \mathcal{A}_x = \begin{vmatrix} m+3 & m+1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = m + 3 + m + 1 = 2m + 4 = 2(m+2)$$

$$\det \mathcal{A}_y = \begin{vmatrix} 2m & m+3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2m - 2m - 6 = -2(2m+3)$$

$$\boldsymbol{S_{\mathrm{II}}} = \left\{\left(\frac{\det \mathcal{A}_x}{\det \mathcal{A}} ; \frac{\det \mathcal{A}_y}{\det \mathcal{A}}\right)\right\} = \{(-(\boldsymbol{m}+\mathbf{2}) ; (\mathbf{2}\boldsymbol{m}+\mathbf{3}))\}$$

Discussion et résolution du système (III) :

$$\det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} 2m & m+1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 = (m-1)(2m+1)$$

Le déterminant de la matrice des coefficients s'annule pour $m = 1$ et pour $m = -\frac{1}{2}$.

① $\boldsymbol{m = 1}$

Le système (III) devient : $\begin{cases} 2x + 2y & = & 4 \\ x + y & = & 2 \end{cases}$

C'est deux fois la même équation. Le système est donc **simplement indéterminé** et :

$\boldsymbol{S_{\mathrm{III}}} = \{(\boldsymbol{k} ; \mathbf{2} - \boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}\}$

Remarquez que pour cette valeur du paramètre , les solutions des systèmes (II) et (III) sont identiques : $\boldsymbol{S_{\mathrm{II}}} = \boldsymbol{S_{\mathrm{III}}} = \{(-\mathbf{3} ; \mathbf{5})\}$.

② $m = -\frac{1}{2}$

Le système (III) devient : $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y &= \frac{5}{2} \\ x - \frac{1}{2}y &= 2 \end{cases}$

En additionnant les deux équations on trouve $0 = \frac{9}{2}$ ce qui est absurde ! Le système est donc **impossible** et $S_{III} = \emptyset$.

Pour cette valeur du paramètre , la seule solution du système (I) de départ est donc celle du système (II), qui est alors $S_{II} = \left\{\left(-\frac{3}{2} ; 2\right)\right\}$.

③ $m \in \mathbb{R}\backslash\left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$

Le système (III) est **déterminé** et sa solution peut être calculée par la règle de Cramer :

$\det \mathcal{A}_x = \begin{vmatrix} m+3 & m+1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3m - 2m - 2 = m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2)$

$\det \mathcal{A}_y = \begin{vmatrix} 2m & m+3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4m - m - 3 = 3(m-1)$

$S_{III} = \left\{\left(\frac{(m+1)(m-2)}{(m-1)(2m+1)} ; \frac{3}{2m+1}\right)\right\}$

Résumé final : les solutions du système (I) sont :

① $m = 1$	∞^1 **solutions**	$S_I = \{(k ; 2-k) \mid k \in \mathbb{R}\}$
② $m = -\frac{1}{2}$	**1 solution**	$S_I = \left\{\left(-\frac{3}{2} ; 2\right)\right\}$
③ $m \in \mathbb{R}\backslash\left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$	**2 solutions**	$S_I = \left\{\left(-(m+2) ; (2m+3)\right), \left(\frac{(m+1)(m-2)}{(m-1)(2m+1)} ; \frac{3}{2m+1}\right)\right\}$

Remarque : Interprétation géométrique.

Comme on peut le voir de la formulation (I') du problème, il s'agit de trouver les points d'intersection d'une droite mobile

$2mx + (m+1)y = m + 3$ (a)

avec deux droites sécantes, dont une est fixe

$2x + y = -1$ (b)

et dont l'autre est également mobile

$x + my = 2$ (c)

Dans le cas $m = 1$, les deux droites (a) et (c) sont confondues, raison pour laquelle il y a ∞^1 de solutions. Lorsque $m = -\frac{1}{2}$, la droite (a) est parallèle à (c) et il n'y a qu'une seule solution, l'intersection de (a) et (b).

Dans tous les autres cas, les deux solutions sont les deux intersections de (a) avec (b) et de (a) avec (c).

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 26 janvier 2012 (Jan Frans Broeckx)