Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 16

EXALG160 – EXALG169

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG160– Louvain, septembre 2003.

Une équipe de faucheurs avait à faucher 2 prés, dont l'un était deux fois plus grand que l'autre. Durant une moitié de la journée, l'équipe a fauché une partie du grand pré. Ensuite, elle s'est divisée en deux moitiés. Les faucheurs de la première moitié sont restés sur le grand pré, qu'ils ont fini de faucher le soir, à la fin de la journée. Ceux de la seconde moitié ont fauché le second pré, également jusqu'au soir, mais il en est resté une parcelle, qu'un faucheur à terminer seul le lendemain en une journée de travail. Combien de faucheurs y avait-il dans l'équipe, sachant que toutes ces personnes accomplissent un travail identique sur un intervalle de temps donné.

Soit w : le travail effectué par un homme en un jour $(m^2 / H.J)$

n : le nombre de personnes dans l'équipe.

S_G : la surface du grand pré (m^2)

S_P : la surface du petit pré (m^2)

On a : (Exprimons les durées en fraction de journée)

$$S_G = n.w.\frac{1}{2} + \frac{n}{2}.w.\frac{1}{2} = \frac{3nw}{4}$$

$$S_G = 2S_P$$

$$S_P = \frac{n}{2}.w.\frac{1}{2} + 1.w.1 = \left(\frac{n}{4} + 1\right)w$$

$$\rightarrow \quad \frac{3nw}{4} = 2\left(\frac{n}{4} + 1\right)w$$

$$\rightarrow \quad \boxed{n = 8}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXALG161– Liège, juillet 2004

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+1+i=0$

On demande seulement les formes trigonométriques des racines.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3-7x^2-28x+160=0$

Sachant qu'elle admet une racine négative ainsi que deux racines positives dont l'une est le double de l'autre.

---

a) $z^3=-1-i=\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right) \rightarrow z=2^{\frac{1}{6}}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)$

$\rightarrow z_1=2^{\frac{1}{6}}\text{cis}\frac{5\pi}{12}$; $z_2=2^{\frac{1}{6}}\text{cis}\frac{\pi}{12}$; $z_3=2^{\frac{1}{6}}\text{cis}\frac{9\pi}{12}$

b) Soit les racines : $a, 2a$ et $-b$ avec a et $b \geq 0$

Le polynôme peut donc s'écrire : $(x-a)(x-2a)(x+b)=0$

On a immédiatement : $\begin{cases} -3a+b=-7 \\ 2a^2b=160 \end{cases}$

En effet, la somme des racines est égale a l'opposé du coefficient du terme en $m-1$ où m est le degré du polynôme; et le produit des racines égal le terme indépendant.

$\rightarrow a^2(3a-7)=80 \rightarrow 3a^3-7a^2-80=0$

Cette équation du second dégré à pour solution $a=4$. (Il suffit d'essayer les différents diviseurs de 80) $\rightarrow$ $b=12-7=5$

Finalement, $x_1=4$; $x_2=8$; $x_3=-5$

Résolu le 19 août 2004. Corrigé le 28 juin 2005 (Jeff)

EXALG162– Liège, juillet 2004

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} (a^2+a)x + (a^2-1)y + (a+1)^2 z = 2a^2 \\ x + (1-a)y + (1+a)z = 1-4a \\ (1-a)x + 2(1-a)y = 6-6a \end{cases}$$

Calculons le déterminant principal du système :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2+a & a^2-1 & (a+1)^2 \\ 1 & 1-a & 1+a \\ 1-a & 2(1-a) & 0 \end{vmatrix} = (a+1)^2(a-1)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1-a & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)^2(a-1)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & -2 & 0 \\ 1-a & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Par conséquent, 1) nous identifions deux valeurs remarquables $a=1$, et $a=2$
2) une des équations est combinaison linéaire des deux autres.

Si $a=1$, la première équation devient $0=2$ et le système est impossible.
Si $a=2$, la troisième équation devient $0=0$, et les deux autres

$$\begin{cases} 2x+4z=2 \\ x+2z=-3 \end{cases} \rightarrow \text{ système impossible}$$

Regardons, maintenant la combinaison linéaire.
Ici, il n'est pas évident de voir de quelle combinaison il s'agit.
Soit L_1, L_2 et L_3 les membres de droite des trois équations du système.
On cherche trois nombres n, m et p, tel que $nL_1 + mL_2 = pL_3$

$$\rightarrow \begin{cases} ma(a+1)x + m(a^2-1)y + m(a+1)^2 z \\ nx + n(1-a)y + n(1+a)z \\ p(1-a)x + p2(1-a)y \end{cases}$$

Les coefficients des inconnues nous donnent le système suivant :

$$\begin{cases} ma(a+1)+n = p(1-a) \\ m(a^2-1)+n(1-a) = 2p(1-a) \\ m(a+1)^2 + n(1+a) = 0 \end{cases} \quad \text{En prenant } m=1 \ \rightarrow \begin{cases} p=-(a+1) \\ n=-(a+1) \end{cases}$$

Appliquons ces coefficients au système. On obtient :

$$\begin{cases} a(a+1)x+(a^2-1)y+(a+1)^2 z = 2a^2 & (1) \\ -(a+1)x+(a^2-1)y-(a+1)^2 z = -(1-4a)(a+1) & (2) \\ (a^2-1)x+2(a^2-1)y \qquad = -6(1-a)(a+1) & (3) \end{cases}$$

Faisons $(1)+(2)$ $\rightarrow$ $\begin{cases} (a^2-1)x+2(a^2-1)y = 2a^2-(1-4a)(a+1) & (4) \\ (a^2-1)x+2(a^2-1)y = -6(1-a)(a+1) & (5) \end{cases}$

Ce système est possible si les seconds membres des équations (4)et (5) sont égaux.

$$\rightarrow 2a^2-(1-4a)(a+1) = -6(1-a)(a+1) \quad \rightarrow \quad a = -\frac{5}{3}$$

Remplaçons dans le système de l'énoncé, a par cette valeur et simplifions :

$$\begin{cases} 5x+8y+2z = 25 \\ 3x+8y-2z = 23 \\ x+2y \qquad = 6 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3x+8y-2z = 23 \\ x+2y \qquad = 6 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 1-2z \\ y = \dfrac{5}{2}+z \end{cases}$$

Résolu le 16 août 2004, Modifié le 5 novembre 2004.

EXALG163– Bruxelles, juillet 2004

Déterminer a et b $\in \mathbb{R}$ tels que

$$P(x) = ax^4 - 7x^3 - ax^2 + bx + 6$$

Soit divisible par

$$x^2 - 2x - 3$$

Comme $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$, il nous suffit d'appliquer Horner deux fois de suite :

	4	3	2	1	0
	a	-7	$-a$	b	6
3		$3a$	$-21+9a$	$-63+24a$	$-189+72a+3b$
	a	$-7+3a$	$-21+9a$	$-63+24a+b$	$-183+72a+3b$
-1		$-a$	$-7-2a$	$14-6a$	$49-18a-b$
	a	$-7+2a$	$-14+6a$	$-49+18a+b$	$-134+54a+2b$

Il en résulte le système suivant :

$$\begin{cases} -49+18a+b=0 \\ -134+54a+2b=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{a=2 \text{ et } b=13}$$

Et le plynôme est :

$$P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6 = (x^2 - 2x - 3)(2x^2 - 3x - 2)$$

Résolu le 2 décembre 2004.

EXALG164– Bruxelles, juillet 2004

En utilisant les propriétés des déterminants, factoriser au maximum :

$$\begin{vmatrix} a & -b & a \\ -a & a & -b \\ b & -a & a \end{vmatrix} \quad (a,b \in \mathbb{R})$$

$$\begin{vmatrix} a & -b & a \\ -a & a & -b \\ b & -a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & -b & a \\ 0 & a & -b \\ b-a & -a & a \end{vmatrix} = (a-b)\begin{vmatrix} 1 & -b & a \\ 0 & a & -b \\ -1 & -a & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)\begin{vmatrix} 1 & -b & a-b \\ 0 & a & a-b \\ -1 & -a & 0 \end{vmatrix} = (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & -b & 1 \\ 0 & a & 1 \\ -1 & -a & 0 \end{vmatrix} = (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & -b & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & -a-b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2\begin{vmatrix} a & 1 \\ -a-b & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a+a+b) = (a-b)^2(2a+b)$$

Résolu le 2 décembre 2004.

EXALG165– Bruxelles, juillet 2004

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4+4=0$$

Utiliser les racines trouvées pour factoriser $z^4+4=0$ en 2 facteurs quadratiques à coefficients réels.

---

1) Utilisons la formule de Moivre :

$z^4=-4=4\cos(\pi+2k\pi)+i\sin(\pi+2k\pi)=4\,\mathrm{cis}(\pi+2k\pi)$

$\rightarrow z=\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)$

k	z
0	$z_1=1+i$
1	$z_2=-1+i$
2	$z_3=-1-i$
3	$z_4=1-i$

2) Pour faire la factorisation demandée, il suffit de regrouper les racines conjuguées

$z^4+1=\left[(z-1-i)(z--1+i)\right]\left[(z+1-i)(z+1+i)\right]$

$=(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)$

Résolu le 2 décembre 2004. Modifié le 20 janvier 2005

EXALG166– FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2004

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{2x^3 - 2x^2 + 4} < \left| x^2 + x \right|$$

$CE : 2x^3 - 2x^2 + 4 \geq 0 \rightarrow 2\left(x^2 - 2x + 2\right)\left(x+1\right) \geq 0$

Le premier facteur est toujours positif. Donc, il faut $x \geq -1 \quad (1)$

1) Résolvons : $\sqrt{2x^3 - 2x^2 + 4} < x^2 + x$

On a une deuxième $CE : x^2 + x > 0 \ \rightarrow \ x\left(x+1\right) > 0$

En tenant compte de (1), $\rightarrow \ x > 0 \quad (2)$

Elèvons l'équation au carré, et réarrangeons : $x^4 + 3x^2 - 4 > 0$

On vérifie facilement que le membre de droite est divisible par 1 et -1.

On peut donc factoriser par Horner :

	4	3	2	1	0
	1		3		–4
1		1	1	4	4
	1	1	4	4	0
–1		–1	0	–4	
	1	0	4	0	

$\rightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = \left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+4\right) > 0$

Ce qui est vérifié, en tenant compte de la CE (2), pour : $\ x > 1$

2) Résolvons maintenant : $\sqrt{2x^3 - 2x^2 + 4} < -x^2 - x$

Ce qui nous donne une troisième $CE : -1 < x < 0 \quad (3)$

On élève au carré, on réarrange, et on obtient la même chose

$\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+4\right) > 0$ Dont les solutions sont incompatibles avec $CE\,(3)$

Conclusion : $\boxed{x > 1}$

Résolu le 2 décembre 2004.

EXALG167– Bruxelles, juillet 2004

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant par rapport au paramètre réel m, le système :

$$\begin{cases} (m+2)x + 3y - 3z = 0 \\ x + (m+1)y - z = 1 \\ 2x + 3y + (m-3)z = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+2 & 3 & -3 \\ 1 & m+1 & -1 \\ 2 & 3 & m-3 \end{vmatrix} = m(m-1)(m+1) \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & m+1 & -1 \\ 0 & 3 & m-3 \end{vmatrix} = -3m$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m+2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-3 \end{vmatrix} = -3m \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} m+2 & 3 & 0 \\ 1 & m+1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3m$$

1) $\underline{m=0}$ Le système devient $\begin{cases} 2x+3y-3z=0 \\ x+y-z=1 \\ 2x+3y-3z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=z-2 \end{cases}$

Le système est simplement indéterminé.

2) $\underline{m=1}$ Le système devient $\begin{cases} 3x+3y-3z=0 \\ x+2y-z=1 \\ 2x+3y-2z=0 \end{cases}$ Système impossible

3) $\underline{m=-1}$ Le système devient $\begin{cases} x+3y-3z=0 \\ x-z=1 \\ 2x+3y-4z=0 \end{cases}$ Système impossible

4) Dans les autres cas : $\begin{cases} x=z=-\dfrac{3}{(m-1)(m+1)} \\ y=\dfrac{1}{m+1} \end{cases}$

Résolu le 2 décembre 2004.

EXALG168– Bruxelles, septembre 2004

Discuter en fonction du paramètre réel *m* du nombre de racines réelles distinctes de l’équation :

$$(m-5)x^2-4mx+(m-2)=0$$

Comme le coefficient de *x* est paire, calculons le Δ' de l'équation :

$\Delta' = 4\mathrm{m}^2-(m-2)(m-5)=3m^2+7m-10$

Ce Δ' a pour racines : $m=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+4\times10\times3}}{6}=\begin{cases} m_1=-\dfrac{10}{3} \\ m_2=1 \end{cases}$

Discussion :

1) $\underline{m<-\dfrac{10}{3} \text{ ou } m>1}$

L'équation a deux racines réelles distinctes : $x=\dfrac{2m\pm\sqrt{3m^2+7m-10}}{m-5}$

2) $\underline{m=1}$

Une racine double : $4x^2+4x+1=0\to x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4}}{4}=-\dfrac{1}{2}$

3) $\underline{-\dfrac{10}{3}<m<1}$ Pas de racines réelles.

4) $\underline{m=-\dfrac{10}{3}}$

Une racine double : $25x^2-40x+16=0\to x=\dfrac{4}{5}$

Résolu le 8 décembre 2004.. Modifié le 26 juin 2006 (Benoît Baudelet)

EXALG169– Bruxelles, septembre 2004

La somme de trois nombres en progression géométrique est 21 et la somme de leurs carrés est 189. Trouver ces nombres.

Soit les trois nombres : $x,\ \ qx,\ \ q^2x$ où q est la raison de la progression.

$$\begin{cases} x+qx+q^2x=21 \\ x^2+q^2x^2+q^4x^2=189 \end{cases} \to \begin{cases} x\left(1+q+q^2\right)=21 & (1) \\ x^2\left(1+q^2+q^4\right)=189 & (2) \end{cases}$$

De (1), il est immédiat que $q=2,\ x=3$ est une solution.

Continuons pour voir s'il esiste d'autres solutions.

De (1) et $(2)\to 21^2\left(1+q^2+q^4\right)=189\left(1+q+q^2\right)^2$

On effectue : $4q^4-6q^3-2q^2-6q+4=0$

Puisque 2 est solution, utilisons Horner

	4	3	2	1	0
	4	–6	–2	–6	4
2		8	4	4	–4
	4	2	2	–2	0

$\to 2(q-2)\left(2q^3+q^2+q-1\right)$ On voit immédiatement que l'inverse de 2 $=\dfrac{1}{2}$

est solution du deuxième facteur: $\to$

	3	2	1	0
	2	1	1	-1
$\frac{1}{2}$		1	1	1
	2	2	2	

$\to 4(q-2)\left(q-\dfrac{1}{2}\right)\left(q^2+q+1\right)$ Le troisième facteur n'a pas de racines reélles

Conclusions

$$\begin{cases} q=2\to x=3 & \text{Les trois nombres sont 3, 6 et 12} \\ q=\dfrac{1}{2}\to x=12 & \text{Les trois nombres sont 12, 6 et 3} \end{cases}$$

Il n'y a donc qu'une seule solution.

Résolu le 2 décembre 2004.