

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 19

EXALG190 – EXALG199

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG190 – Mons, juillet 2003.

Discuter et résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x + my + 2mz = 1 \\ x + (1-m)y + (2-2m)z = 0 \\ 2mx + (2m+1)y + (2m^2+m)z = m \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m & 2m \\ 1 & 1-m & 2(1-m) \\ 2m & 2m+1 & m(2m+1) \end{vmatrix} = (m-2)(1-2m)(1+2m)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & m & 2m \\ 0 & 1-m & 2-2m \\ m & 2m+1 & 2m^2+m \end{vmatrix} = (1-m)(m-2)(1+2m)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m \\ 1 & 0 & 2-2m \\ 2m & m & 2m^2+m \end{vmatrix} = -m(2m-1)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1-m & 0 \\ 2m & 2m+1 & m \end{vmatrix} = m+1$$

$$\underline{m=2}: \text{ Le système devient : } \begin{cases} x+2y+4z=1 \\ x-y-2z=0 \\ 4x+5y+10z=2 \end{cases} \quad \text{Impossible}$$

$$\underline{m=\frac{1}{2}}: \text{ Le système devient : } \begin{cases} x+\frac{y}{2}+z=1 \\ x+\frac{y}{2}+z=0 \\ x+2y+z=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Impossible}$$

$$\underline{m=-\frac{1}{2}}: \text{ Le système devient : } \begin{cases} x-\frac{y}{2}-z=1 \\ x+\frac{3y}{2}+3z=0 \\ -x=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Impossible}$$

$$\text{Dans les autres cas : } x = \frac{1-m}{1-2m}; \quad y = \frac{m}{(m-2)(1+2m)}; \quad z = \frac{m+1}{(m-2)(1-2m)(1+2m)}$$

Résolu le 15 août 2005.

EXALG191 – Mons, juillet 2003.

Soit l'inéquation

$$\log_4 2^{x-4} + \log_3 (a-2^x)^{\log_4 3} < 1$$

1. Montrer que l'expression ci-dessus peut se mettre sous la forme d'une inéquation du second degré.
2. Déterminer l'ensemble des solutions pour x en fonction du paramètre réel a .

$$CE : a - 2^x > 0 \rightarrow a > 0 \rightarrow x < \frac{\ln a}{\ln 2}$$

Transformons l'inéquation :

$$\log_4 2^{x-4} + \log_3 (a-2^x)^{\log_4 3} < 1 \rightarrow \log_4 2^{x-4} + \log_4 3 \frac{\log_4 (a-2^x)}{\log_4 3} < 1$$

$$\rightarrow \log_4 2^{x-4} (a-2^x) < 1 \rightarrow 2^{x-4} (a-2^x) < 4 \rightarrow 2^{2x} - a \cdot 2^x + 2^6 > 0 \quad (1)$$

Ce qui est bien une inéquation du second degré. Résolvons l'équation :

$$1) \Delta = a^2 - 2^8 > 0 \rightarrow \begin{cases} a < -2^4 & \text{à rejeter} \\ a > 2^4 = 16 \end{cases} \quad \text{Dans ce cas nous aurons deux solutions.}$$

$$\rightarrow 2^x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2} \rightarrow x = \frac{\ln(a \pm \sqrt{a^2 - 16})}{\ln 2} - 1$$

$$\text{Donc pour notre inéquation : } \begin{cases} x < \frac{\ln(a - \sqrt{a^2 - 16})}{\ln 2} - 1 \\ x > \frac{\ln(a + \sqrt{a^2 - 16})}{\ln 2} - 1 \end{cases}$$

Nous devons maintenant faire quelques vérifications puisque $x < \frac{\ln a}{\ln 2}$

$$\frac{\ln(a + \sqrt{a^2 - 16})}{\ln 2} - 1 < \frac{\ln a}{\ln 2} \rightarrow \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{2} < a \rightarrow a^2 - 16 < a^2 \text{ toujours vérifié.}$$

$$2) \Delta = a^2 - 2^8 = 0 \rightarrow a = 16 \text{ Dans ce cas l'inéquation (1) est toujours vérifiée sauf } x = \frac{\ln a}{\ln 2} - 1 = 3$$

$$3) \Delta = a^2 - 2^8 < 0 \rightarrow a < 16 \text{ (En réalité } 0 < a < 16 \text{)}$$

Dans ce cas l'inéquation (1) est toujours vérifiée pour $x < \frac{\ln a}{\ln 2}$

Conclusions

$$\begin{array}{ll} a \leq 0 & \text{Pas de solutions} \\ 0 < a < 16 & x < \frac{\ln a}{\ln 2} \\ a = 16 & \begin{cases} x < 2 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \\ a > 16 & \begin{cases} x < \frac{\ln(a - \sqrt{a^2 - 16})}{\ln 2} - 1 \\ \frac{\ln(a + \sqrt{a^2 - 16})}{\ln 2} - 1 < x < \frac{\ln a}{\ln 2} \end{cases} \end{array}$$

Résolu le 8 août 2005.

EXALG192 – Mons, juillet 2003.

Résoudre

$$x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 18x + 45 = 0$$

Sachant que $1 - 2i$ est une racine

Si $1 - 2i$ est une racine alors $1 + 2i$ est aussi une racine, et le polynôme est divisible par $(x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i) = x^2 - 2x + 5$

Effectuons la divisions:

4	3	2	1	0	$x^2 - 2x + 5$
1	-2	14	-18	45	x^2
<u>1</u>	<u>-2</u>	<u>5</u>			+9
0	0	9			
		<u>9</u>	<u>18</u>	<u>45</u>	
		0	0	0	

$$\rightarrow P(x) = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 9)$$

Ce qui nous donne comme racines : $1 + 2i$, $1 - 2i$, $3i$, $-3i$

Résolu le 15 août 2005.

EXALG193 – Mons, juillet 2003.

Deux automobilistes se déplacent d'une ville A à une ville B éloignée d'une distance d . Le premier roule plus vite que le second. On suppose leur vitesse constante tout au long du trajet. La différence de vitesse est de 10 km/h et le second accuse un retard R à l'arrivée.

Si maintenant les deux automobilistes augmentent leur vitesse d'une constante a , le retard est réduit de moitié.

1 Déterminer une expression (la plus réduite possible) de la vitesse initiale du premier automobiliste et la distance entre les deux villes.

2. Vérifier votre résultat avec $R = 10$ h et $a = 10$ km/h

Soit A le premier et B le second. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_A = \frac{d}{v_A} \\ t_B = \frac{d}{v_B} \\ R = t_B - t_A \\ v_A - v_B = 10 \end{array} \right. \quad \text{et après l'augmentation de vitesse} \quad \left\{ \begin{array}{l} t'_A = \frac{d}{v'_A} = \frac{d}{v_A + a} \\ t'_B = \frac{d}{v'_B} = \frac{d}{v_B + a} \\ R' = t'_B - t'_A = \frac{R}{2} \\ v'_A - v'_B = 10 \end{array} \right.$$

Combinons les équations :

$$R = t_B - t_A = \frac{d}{v_B} - \frac{d}{v_A} = d \frac{v_A - v_B}{v_A v_B} = \frac{10d}{v_A v_B}$$

$$R' = t'_B - t'_A = \frac{R}{2} = \frac{d}{v_B + a} - \frac{d}{v_A + a} = \frac{10d}{(v_A + a)(v_B + a)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{v_A v_B} = \frac{2}{(v_A + a)(v_B + a)} \rightarrow v_A v_B - a v_A - a v_B - a^2 = 0$$

$$\rightarrow v_A (v_A - 10) - a v_A - a (v_A - 10) - a^2 = 0 \rightarrow v_A^2 - 2(5 + a)v_A + 10a - a^2 = 0$$

$$\rightarrow v_A = 5 + a + \sqrt{25 + 2a^2} \quad \text{et} \quad d = \frac{R}{10} (v_A - 10) v_A$$

Nous pouvons éliminer la racine $5 + a - \sqrt{25 + 2a^2}$ car elle correspond à des vitesses trop faibles ou négatives.

Appliquons pour $R = 10$ et $a = 10 \rightarrow v_A = 30 \text{ km/h}$ et $d = 600 \text{ km}$

Résolu le 15 août 2005. Modifié le 9 septembre (Pierre Bernimont)

EXALG194 – Mons, juillet 2003.

Soit le polynôme :

$$P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Déterminer tous les coefficients a de $P(x)$ soit divisible par sa dérivée première

La dérivée première est : $P'(x) = 5x^4 + 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$

	5	4	3	2	1	0	$P'(x)$
	1	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	$\frac{1}{5}x$
Effectuons la division :	1	$\frac{4a_4}{5}$	$\frac{3a_3}{5}$	$\frac{2a_2}{5}$	$\frac{a_1}{5}$		$\frac{a_4}{25}$
	0	$\frac{a_4}{5}$	$\frac{2a_3}{5}$	$\frac{3a_2}{5}$	$\frac{4a_1}{5}$		$\frac{a_4}{25}$
		$\frac{a_4}{5}$	$\frac{4a_4^2}{25}$	$\frac{3a_3a_4}{25}$	$\frac{2a_2a_4}{25}$	$\frac{a_1a_4}{25}$	
		0	0	0	0	0	

Ce qui nous conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2a_3}{5} = \frac{4a_4^2}{25} \\ \frac{3a_2}{5} = \frac{3a_3a_4}{25} \\ \frac{4a_1}{5} = \frac{2a_2a_4}{25} \\ a_0 = \frac{a_1a_4}{25} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_3 = \frac{2}{5}a_4^2 \\ a_2 = \frac{a_3a_4}{5} = \frac{2}{25}a_4^3 \\ a_1 = \frac{a_2a_4}{10} = \frac{1}{125}a_4^4 \\ a_0 = \frac{1}{3125}a_4^5 \end{array} \right.$$

Donc en posant : $a_4 = a$

$$\rightarrow \boxed{P(x) = x^5 + ax^4 + \frac{2}{5}a^2x^3 + \frac{2}{25}a^3x^2 + \frac{1}{125}a^4x + \frac{1}{3125}a^5}$$

Résolu le 15 août 2005.

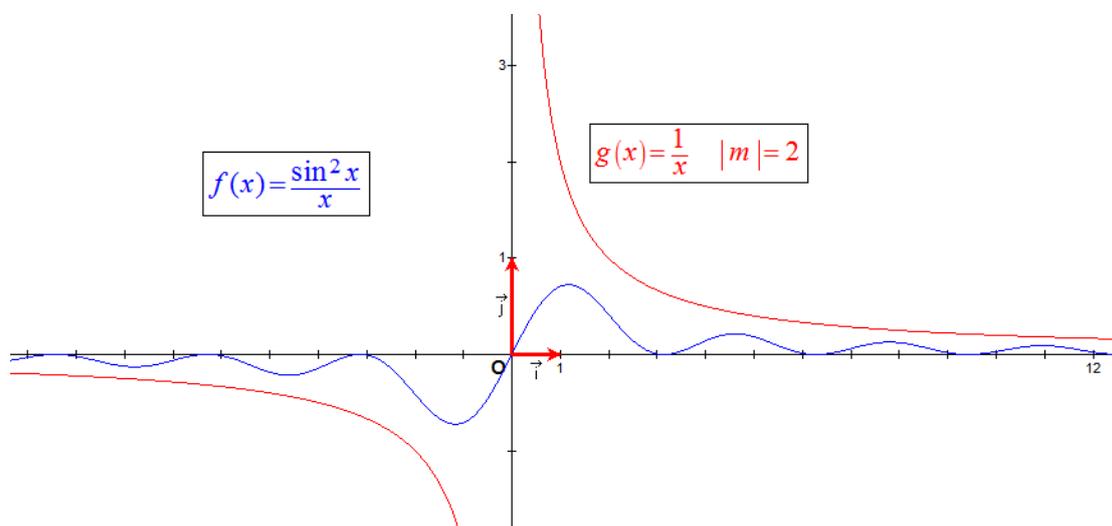
EXALG195 – Mons, juillet 2003.

On demande de discuter des solutions de l'inéquation suivante, en fonction du paramètre m

$$\frac{\sin^2 x}{x} > \frac{m^2}{x}$$

Soit $|m| > 1$

- $x > 0 \rightarrow$ On peut simplifier par x sans changer l'inégalité qui devient :
 $\sin^2 x > m^2$ Cette inégalité n'est jamais vérifiée.
- $x < 0 \rightarrow$ On peut simplifier par x mais en changeant le sens de l'inégalité.
 $\sin^2 x < m^2$ Cette inégalité est toujours vérifiée.

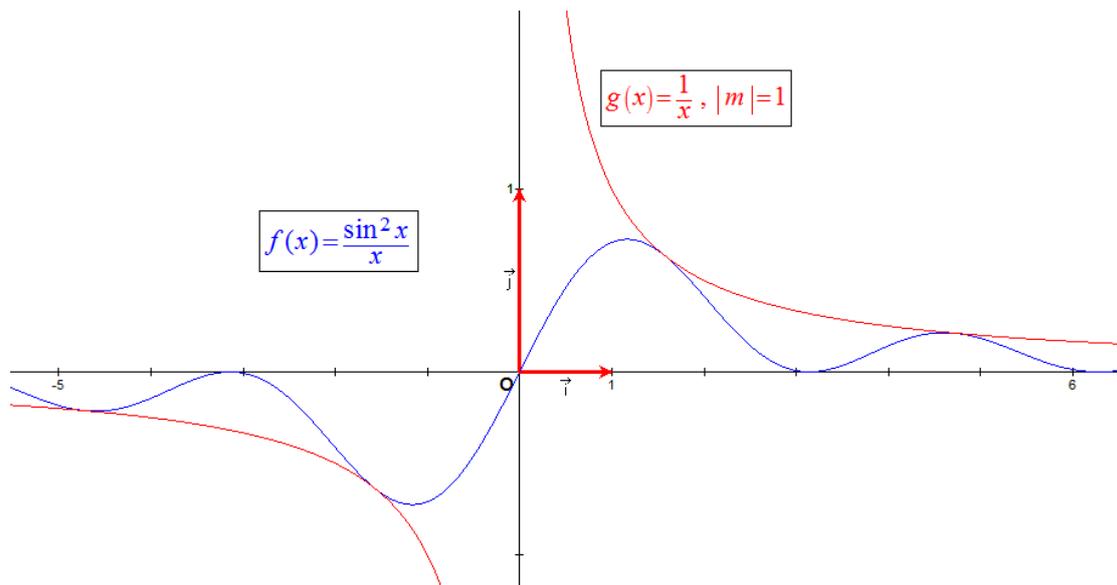


Soit $|m| = 1$

- $m = 1 \rightarrow$ Résolvons l'équation $\sin^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x - 1 = 0 \rightarrow (\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$
 $\rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = k \frac{\pi}{2}$.

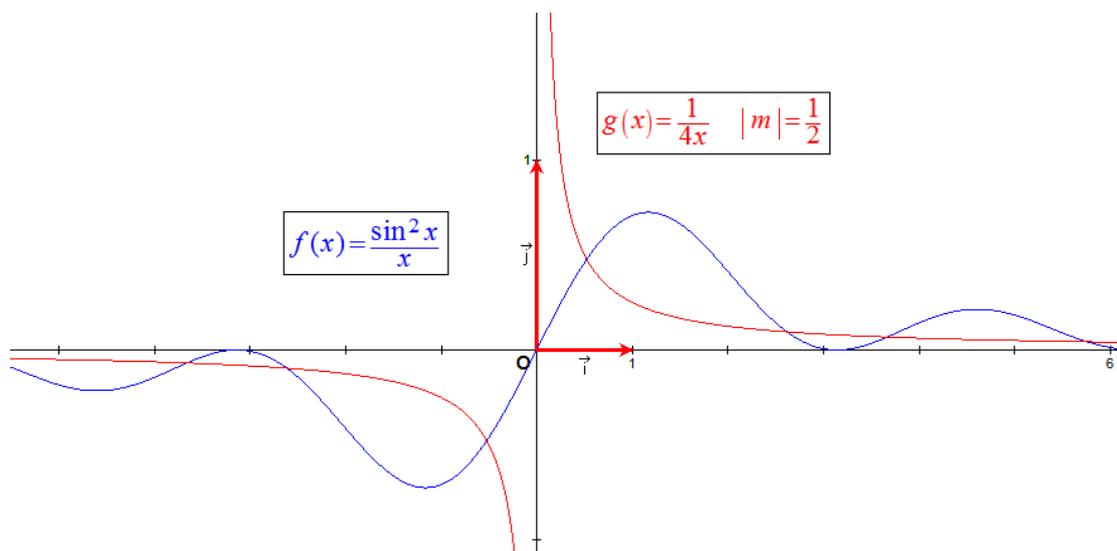
Par conséquent :

- 1) $x > 0$: l'inéquation n'est jamais vérifiée.
- 2) $x < 0$: l'inéquation est toujours vérifiée sauf pour $x = k \frac{\pi}{2}$



Soit $|m| < 1$

- $x > 0 \rightarrow$ L'inéquation sera vérifiée $\arcsin m + k\pi < x < \pi - \arcsin m + k\pi$
- $x < 0 \rightarrow$ L'inéquation sera vérifiée pour $-\arcsin m + k\pi < x < \arcsin m + k\pi$



Résolu le 15 août 2005. Modifié le 28 mai 2006

EXALG196 – Mons, juillet 2003.

Soit l'équation :

$$2x^4 + 3x^3 + Cx^2 + 3x + 2 = 0$$

1. Montrer que cette expression peut se mettre sous la forme d'une équation du second degré en appliquant le changement de variable

$$\text{suivant : } y = x + \frac{1}{x}$$

2. résoudre l'équation pour $C = 41 / 8$
-

1) Il suffit de diviser par x^2

$$2x^4 + 3x^3 + Cx^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow 2x^2 + 3x + C + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\rightarrow 2\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + C - 4 = 0 \rightarrow 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + C - 4 = 0$$

$$\text{Si } y = x + \frac{1}{x} \rightarrow 2y^2 + y + C - 4 = 0$$

$$2) C = \frac{41}{8} \rightarrow 2y^2 + y + \frac{41}{8} - 4 = 0 \rightarrow 16y^2 + 24y + 9 = 0 \rightarrow 16\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Donc : } y = x + \frac{1}{x} \rightarrow x^2 - xy + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3 - \sqrt{55}i}{8} \\ x_2 = -\frac{3 + \sqrt{55}i}{8} \end{cases}$$

Résolu le 15 août 2005.

EXALG197 – Mons, juillet 2003.

Pour quelles valeurs de paramètre réel m l'équation admet-elle toujours au moins une solution ?

$$\cos x + \cos \frac{x}{2} = m$$

$$\cos x + \cos \frac{x}{2} = m \rightarrow 2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - 1 - m = 0$$

Pour que cette équation admette toujours au moins une solution il suffit que :

$$\Delta = 1 + 4.2(1 + m) = 9 + 8m \geq 0 \rightarrow m \geq -\frac{9}{8}$$

Résolu le 15 août 2005.

EXALG198 – Mons, juillet 2003.

Résoudre l'équation suivante

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) + 1 = 0$$

Posons $t = \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) \rightarrow t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \rightarrow (t+1)(t^2+1) = 0$

1) $t = -1$ $\rightarrow \frac{z-2i}{z+2i} = -1 \rightarrow z-2i = -z-2i \rightarrow z = 0$

2) $t = i$ $\rightarrow \frac{z-2i}{z+2i} = i \rightarrow z-2i = iz-2 \rightarrow (1-i)z = 2(i-1) \rightarrow z = -2$

3) $t = -i$ $\rightarrow \frac{z-2i}{z+2i} = -i \rightarrow z-2i = -iz+2 \rightarrow (1+i)z = 2(i+1) \rightarrow z = 2$

Résolu le 15 août 2005.

EXALG199 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2005.

Déterminer m tel que l'inégalité soit vérifiée quelle que soit la valeur de $x \in \mathbb{R}$

$$(m+1)x^2 < (m-1)(2x-3)$$

$$(m+1)x^2 < (m-1)(2x-3) \rightarrow (m+1)x^2 - 2(m-1)x - 3(m-1) < 0$$

Il faut que le coefficient en x^2 soit toujours négatif $\rightarrow m < -1$

D'autre part, le coefficient de x étant pair, on calcule Δ'

$$\Delta' = (m-1)^2 - 3(m-1)(m+1) = -2m^2 - 2m + 4 = -2(m+2)(m-1)$$

Δ' doit toujours être négatif $\rightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases}$ à rejeter

Conclusion : $m < -2$

Résolu le 15 août 2005.