

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 2

EXALG020 – EXALG029

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

1 avril 03

EXALG020 – Mons, questions-types, 2000-2001.

Déterminer la relation liant les paramètres a et b pour que les valeurs (x, y, z) des solutions du système paramétrique suivant soient en progression géométrique.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + y + z = 0 \\ x + y + bz = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = a(1-b)$$

$$x = \frac{1}{a(1-b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{a}$$

$$y = \frac{1}{a(1-b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = -\frac{ab-1}{a(1-b)}$$

$$z = \frac{1}{a(1-b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{a-1}{a(1-b)}$$

Soit les trois solutions $x, y = rx, z = r^2x$. On a :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{a} \\ rx = -\frac{ab-1}{a(1-b)} \\ r^2x = \frac{a-1}{a(1-b)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \frac{ab-1}{1-b} \\ r^2 = \frac{1-a}{1-b} \end{cases} \rightarrow \left(\frac{ab-1}{1-b}\right)^2 = \frac{1-a}{1-b}$$

$$\rightarrow (ab-1)^2 = (1-a)(1-b) \text{ avec } a \neq 0 \text{ et } b \neq 1$$

EXALG021 – FSA, ULB, Bruxelles, septembre 1992.

Résoudre

$$\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(2x - y - 5) = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$1) y = 0 \rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$2) y \neq 0 \rightarrow \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \rightarrow 2x - x^2 + 4x - 3 - 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \rightarrow y = 3 \\ x = 2 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

Résolu le 19 mars 2003

EXALG022 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2000.

Résoudre

$$\sqrt{\frac{6x-11}{3x-2}} \leq \frac{1}{x}$$

CE : * $x \neq 0$

* $x \neq \frac{2}{3}$

* $\frac{6x-11}{3x-2} \geq 0 \rightarrow x < \frac{2}{3} \quad x \geq \frac{11}{6}$

A) si $x < 0$ Jamais vérifié.

B) si $x > 0 \quad \frac{6x-11}{3x-2} \leq \frac{1}{x^2} \rightarrow \frac{6x-11}{3x-2} - \frac{1}{x^2} \leq 0 \rightarrow \frac{6x^3-11x^2-3x+2}{x^2(3x-2)} \leq 0$

On décompose par Honer (car le dénominateur = 0 pour $x = 2$),
et on résout le trinôme du second degré.

$$\rightarrow \frac{(x-2)(2x+1)(3x+2)}{x^2(3x-2)} \leq 0$$

Tableau des signes :

		$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{6}$	2						
x^2	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$3x-2$	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+
$2x+1$	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$3x-1$	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+
	+	0	-	\therefore	-	0	+	\therefore	-	-	-	0	+

Compte tenu des CE, on en déduit : $0 < x \leq \frac{1}{3}$ et $\frac{11}{6} \leq x \leq 2$

EXALG023 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1999.

Résoudre

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{|1+x|}$$

CE : $x \neq 1$ $x \neq -1$

A) $x < -1$ toujours vérifié.

$$\text{B) } x > -1 \rightarrow \frac{1}{1-x} < \frac{1}{1+x} \rightarrow \frac{2x}{(1-x)(1+x)} < 0$$

Tableau des signes :

	-1	0	1				
x	-	-	0	+	+	+	
$1-x$	+	+	+	+	0	-	$\rightarrow -1 < x < 0$ et $x > 1$
$1+x$	-	0	+	+	+	+	+
	+	\therefore	-	0	+	\therefore	-

Note : Les valeurs < -1 ne doivent pas être considérées.

Conclusion : $x < 0$ et $x > 1$ avec $x \neq -1$

Résolu le 19 mars 2003

EXALG024 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2000.

Résoudre

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 3} \leq \frac{2}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x-1)} \leq \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$CE : x \neq 1 \quad x \neq 2 \quad x \neq 3$$

$$\frac{(x-2)^2 - 2(x-3)(x-1)}{(x-1)(x-2)^2(x-3)} = \frac{-x^2 + 4x - 2}{(x-1)(x-2)^2(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{(x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2}))}{(x-1)(x-2)^2(x-3)} \geq 0$$

Tableau des signes :

		$2 - \sqrt{2}$	1	2	3	$2 + \sqrt{2}$		
$x - (2 + \sqrt{2})$	-	-	-	-	-	-	-	0 +
$x - (2 - \sqrt{2})$	-	0	+	+	+	+	+	+ +
$x - 1$	-	-	0	+	+	+	+	+ +
$(x - 2)^2$	+	+	+	+	0	+	+	+ +
$x - 3$	-	-	-	-	-	0	+	+ +
	+	0	- ∴	+	∴	+	∴	- 0 +

Conclusions: $x \leq 2 - \sqrt{2}$ $1 < x < 2$ $2 < x < 3$ $x \geq 2 + \sqrt{2}$

ou bien : $\{\leftarrow, 2 - \sqrt{2}\} \cup \{]1, 2[\} \cup \{]2, 3[\} \cup \{ 2 + \sqrt{2}, \rightarrow \}$

EXALG025 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2000.

Résoudre

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

CE : $x < 2$

1) si $x < 0$ toujours vérifié.

2) si $x > 0$ donc $0 < x < 2$

Elevons au carré :

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{2-x} \rightarrow \frac{2-x-x^2}{x^2(2-x)} \leq 0 \rightarrow -\frac{(x+2)(x-1)}{x^2(2-x)} \leq 0$$

		-2	0	1	2				
$-(x+2)$	+	0	-	-	-	-	-	-	-
$x-1$	-	-	-	-	0	+	+	+	+
x^2	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$2-x$	+	+	+	+	+	+	+	0	-
	-	0	+	\therefore	+	0	-	\therefore	-

Compte tenu des *CE* :

$$\rightarrow x < 0 \text{ et } 1 \leq x < 2 \text{ ou } \{ \leftarrow; 0[\} \cup \{ [1; \rightarrow \}$$

EXALG026 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1998.

Résoudre

$$\left(\frac{3-2x}{x-1}\right)^2 \leq \left(\frac{6-5x}{x+2}\right)^2$$

CE : $x \neq 1$ $x \neq -2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3-2x}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{6-5x}{x+2}\right)^2 &= \left(\frac{3-2x}{x-1} - \frac{6-5x}{x+2}\right) \left(\frac{3-2x}{x-1} + \frac{6-5x}{x+2}\right) \leq 0 \\ \frac{3x(x-2)^2(10-7x)}{(x-1)^2(x+2)^2} &\leq 0 \end{aligned}$$

Tableau des signes :

		-2	0	1	$\frac{10}{7}$	2					
$(x-2)^2$	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	
x	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	
$10-7x$	+	+	+	+	+	+	0	-	-	-	
$(x-1)^2$	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	
$(x+2)^2$	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	
	-	∴	-	0	+	∴	+	0	-	0	-

Conclusions : $x < -2 < x \leq 0$ et $x \geq \frac{10}{7}$

EXALG027 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1997.

Résoudre

$$\frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{2-x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

CE :

$$\left. \begin{array}{l} 1) x > 0 \\ 2) x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 \geq 0 \rightarrow x \geq 0 \\ 3) x \neq 2 \end{array} \right\} \rightarrow x \in \mathbb{R}_0 \setminus \{2\}$$

$$\frac{\sqrt{x(x-1)^2}}{2-x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \frac{x-1}{2-x} \sqrt{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

On peut multiplier les deux membres par \sqrt{x} car $\sqrt{x} > 0$

$$\rightarrow \frac{x(x-1)}{2-x} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{x^2 - 2}{2-x} \leq 0$$

Tableau des signes :

	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	
$x^2 - 2$	+ 0	- - - 0	+ + +		
$2 - x$	+ +	+ + + +	+ 0 -		
$\frac{x^2 - 2}{2 - x}$	+ 0	- - - 0	+ / -		

Conclusion : $x \in [0; \sqrt{2} [\cup] 2; \rightarrow$

EXALG028 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1996.

Résoudre

$$\frac{x-2}{\sqrt{x^2-5x+6}} \leq \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-4}$$

$$\frac{x-2}{\sqrt{(x-3)(x-2)}} \leq \frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{x-4}$$

CE :

A) $x < 2$ $x > 3$

B) $x \leq 1$ $x \geq 2$

C) $x \neq 4$

→ $x \leq 1$ et $x > 3$ avec $x \neq 4$

1) Soit $x > 4$

$$\rightarrow \frac{(x-2)^2}{(x-3)(x-2)} \leq \frac{(x-1)(x-2)}{(x-4)^2}$$

$$\rightarrow \frac{(x-2)^2(x-4)^2 - (x-1)(x-2)^2(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)^2} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{(x-2)(13-4x)}{(x-3)(x-4)^2} \leq 0$$

On voit immédiatement que cette inéquation est vérifiée pour $x \geq 4$

2) $3 < x < 4$

Inéquation impossible (car du positif < du négatif).

3) $x \leq 1$

L'inéquation à vérifier devient:

$$\frac{(x-2)(13-4x)}{(x-3)(x-4)^2} \geq 0$$

Celle-ci est toujours vérifiée si $x \leq 1$

Conclusions: $x \leq 1$ et $x \geq 4$

EXALG029 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1999.

Déterminer les valeurs réelles de m pour lesquelles le trinôme :

$$mx^2 + mx + (1 + m)$$

possède deux racines réelles de même signe.

1) Le produit des racines : $\frac{1+m}{m} > 0$

2) Racines réelles : $\Delta \geq 0 \rightarrow m^2 - 4m(1+m) = -3m^2 - 4m \geq 0$

A) Si $m > 0 \rightarrow \begin{cases} 1+m > 0 \\ -3m^2 - 4m \geq 0 \end{cases}$

Ce qui est impossible, car si $m > 0$, on a $-3m^2 - 4m < 0$

B) Si $m < 0 \rightarrow \begin{cases} 1+m < 0 \\ -3m^2 - 4m \geq 0 \end{cases}$

Le tableau des signes suivant :

	$-\frac{4}{3}$	-1	0				
$1+m$	-	-	-	0	+	+	+
$-3m^2-4m$	-	0	+	+	+	0	-
	+	0	-	0	+	0	-

permet de conclure : $-\frac{4}{3} \leq x < -1$

0