Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 20

EXALG200 – EXALG209

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG200 – ERM, 2004.

On donne l'équation

$$4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$$

On demande de résoudrecette équation sachant que ses racines sont en progression arithmétique

---

Mettons l'équation sous la forme : $x^3 - 6x^2 + \frac{23}{4}x + \frac{9}{2} = 0$

Soient donc les trois racines : $a - r, a$ et $a + r$

La somme des racines est égale à l'opposé du coefficient de x^2

$\Rightarrow a + r + a + a - r = 6 \Rightarrow a = 2$

Le produit des racines est égale à l'opposé du terme indépendant :

$\Rightarrow a(a+r)(a-r) = -\frac{9}{2} \Rightarrow 4 - r^2 = -\frac{9}{4} \Rightarrow r^2 = 4 + \frac{9}{4} \Rightarrow r = \frac{5}{2} = 2.5$

Conclusion : les trois racines sont : $\begin{cases} x_1 = 4.5 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -0.5 \end{cases}$

Résolu le 15 août 2005. Modifié le 22 mars 2018 (Robert Moulan)

EXALG201 – ERM, 2004.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\log_2(x+1)+\log_4 x<1$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$\log_2(x+1)+\log_4 x<1$

$CE : x>0$

$\log_2(x+1)+\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}<1 \Rightarrow \log_2(x+1)+\dfrac{1}{2}\log_2 x<1 \Rightarrow (x+1)\sqrt{x}<2 \quad (1)$

Or $x>0 \Rightarrow (x+1)\sqrt{x}>0$ donc $(1) \to (x+1)^2 x<4 \Rightarrow \underbrace{x^3+2x^2+x-4}_{P(x)}<0$

Horner :

	3	2	1	0
	1	2	1	−4
1		1	3	4
	1	3	4	0

$\to P(x)=(x-1)\underbrace{\left(x^2+3x+4\right)}_{Q(x)}<0$

$Q(x)$ est non factorisable car $\Delta=9-4\times 4<0 \Rightarrow Q(x)>0$

Il reste : $x-1<0 \Rightarrow x<1$

Conclusion : $\boxed{0<x<1}$

Résolu le 15 août 2005.

EXALG202 – ERM, 2003.

On donne la matrice A dans laquelle x,y et z sont des paramètres réels

$$A=\begin{pmatrix} z-y & -\dfrac{x+y}{2} \\ 0 & z-2x \end{pmatrix}$$

On demande de déterminer x,y et z de sorte que :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On doit avoir : $A.A^{-1}=I$ c'est à dire

$$\begin{pmatrix} z-y & -\dfrac{x+y}{2} \\ 0 & z-2x \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui conduit au système $\begin{cases} -2y+2z=1 \\ -x-7y+6z=0 \\ -2x+z=1 \end{cases}$

qui a pour solution $\begin{cases} x=\dfrac{5}{6} \\ y=\dfrac{13}{6} \\ z=\dfrac{8}{3} \end{cases}$

Et qui finalement nous donnera la matrice $A=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Résolu le 1 septembre 2005.

EXALG203 – ERM 2003.

On donne l'équation suivante, dans laquelle a et b sont des paramètres réels

$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{13}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{8}}=a+ib; \qquad i^2=-1$$

On demande de déterminer a et b

Utilisons la notation exponentielle : $\begin{cases} 1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2e^{\frac{\pi}{3}i} \\ \sqrt{3}-i=2e^{-\frac{\pi}{6}i} \end{cases}$

$$\rightarrow \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{13}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{8}}=\frac{2^{13}e^{\frac{13\pi}{3}i}}{2^{8}e^{-\frac{8\pi}{6}i}}=2^5e^{\left(\frac{13}{3}+\frac{4}{3}\right)\pi\iota}=32e^{\frac{17}{3}\pi\iota}=32e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

$$=32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=16\left(1-i\sqrt{3}\right)$$

Conclusion : $a=16$ et $b=-16\sqrt{3}$

Rappel : $re^{i\varphi}=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$

Le 1 septembre 2005. Modifié le 25 juin 2006 (Meriem)

EXALG204 – LOUVAIN, juillet 2005 – Série 1.

La durée totale du croisement (voir définitions ci-dessous) du Thalys Bruxelles-Paris (BP) se déplaçant à une vitesse v_0 avec un premier train (PB1), deux fois moins long que BP et roulant en sens inverse à une vitesse v_1, a été de 10 secondes.
Quelques minutes plus tard, le même train Bruxelles-Paris (BP) rencontre un second train (PB2), cette fois deux fois plus long que BP et roulant en sens inverse à une vitesse v_2 ; la durée totale de ce second croisement est de 12 secondes.
Plus tard, ce deuxième train (PB2) rattrape le premier (PB1), avant d'arriver à Bruxelles. Ils sont alors sur deux voies parallèles. Quelle sera la durée totale du dépassement du premier train (PB1) par le second (PB2) ? On suppose que les trois trains roulent à vitesses constantes durant toute cette période.

Définitions

La durée totale d'un croisement est le temps qui s'écoule entre l'instant où les deux têtes de train sont au même niveau et celui où leurs arrières le sont à leur tour.

La durée totale d'un dépassement est le temps qui s'écoule entre l'instant où l'avant du train le plus rapide coïncide avec l'arrière de l'autre train et celui où l'arrière du train arrive au niveau de l'autre train.

Définissons nos variables :

	Vitessse	Longueur
BP	v_0	x
BP1	v_1	$\frac{x}{2}$
BP2	x_2	$2x$

$t_{C1} = 10s$: temps de croisement entre BP et BP1

$t_{C2} = 12\ s$: temps de croisement entre BP et BP2

t_D : temps de dépassement de BP1 par BP2

Nous avons immédiatement :

$$\begin{cases} t_{C1}\left(v_0+v_1\right)=x+\dfrac{x}{2} \\ t_{C2}\left(v_0+v_2\right)=x+2x \\ t_D\left(v_2-v_1\right)=2x+\dfrac{x}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10\left(v_0+v_1\right)=\dfrac{3x}{2} \\ 12\left(v_0+v_2\right)=3x \\ t_D\left(v_2-v_1\right)=\dfrac{5x}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_0+v_1=\dfrac{3x}{20} & (1) \\ v_0+v_2=\dfrac{3x}{12} & (2) \\ v_2-v_1=\dfrac{5x}{2t_D} & (3) \end{cases}$$

Faisons $(2)-(1) \rightarrow \begin{cases} v_2-v_1=\dfrac{3x}{12}-\dfrac{3x}{20} \\ v_2-v_1=\dfrac{5x}{2t_D} \end{cases} \rightarrow \dfrac{3x}{12}-\dfrac{3x}{20}=\dfrac{5x}{2t_D} \rightarrow \dfrac{3}{6}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{5}{T_D}$

$\rightarrow \dfrac{6}{30}=\dfrac{5}{T_D} \rightarrow \boxed{T_D=25\ s}$

Résolu le 15novembre 2005.

EXALG205 – Louvain, septembre 2005.

Résoudre dans les réels, l'inéquation suivante :

$$\frac{x-2}{\sqrt{x^2-5x+6}} \le \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-4}$$

CE :

1) $x \neq 4$

2) $\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ x^2-3x+2 \ge 0 \end{cases}$ $\left(< \text{ car se trouve au dénominateur}\right)$

$\rightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3)>0 \\ (x-1)(x-2) \ge \end{cases} \rightarrow$

		1		2		3	
$(x-2)(x-3)$	+	+	+	0	−	0	+
$(x-1)(x-2)$	+	0	−	0	+	+	+
	+	0	−	0	−	0	+

$\rightarrow \quad x \le 1 \text{ et } x>3$

Les *CE* sont donc $x \in \left]-\infty; 1\right] \cup \left]3; 4\right[\cup \left]4; +\infty\right[$

<u>1er cas</u> $x>4 \quad \left(\rightarrow\ + \le + \quad \rightarrow \quad +^2 \le +^2\right)$

Nous pouvons donc élever au carré sans changer le sens de l'inégalité

$$\rightarrow \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} \le \frac{(x-2)(x-1)}{(x-4)^2} \rightarrow (x-4)^2 \le (x-3)(x-1) \rightarrow x \ge \frac{13}{4}$$

Ce qui devient $x>4$

<u>2ème cas</u> $3<x<4 \quad (\rightarrow\ + \le -)$ Ce qui est impossible

<u>3ème cas</u> $x \le 1 \quad \left(\rightarrow\ - \le - \quad \rightarrow \quad -^2 \ge -^2\right)$

Si nous élevons au carré, nous devons changer le signe de l'inégalité.

Nous arrivons à $x \le \frac{13}{4}$ ce qui devient $x \le 1$

<u>Conclusion</u> $x \in \left]-\infty; 1\right] \cup \left]4; +\infty\right[$

Résolu le 15 novembre 2005.

EXALG206 – Louvain, septembre 2005.

Résoudre dans les complexes, l'équation

$$(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0$$

Exprimer votre réponse sous la forme $a + ib$.

Pour simplifier l'équation multiplions par $(2-i)$ c'est-à-dire par le conjugué du coefficient de z^2

Nous obtenons : $5z^2-(9-7i)z+2(1-3i)=0$

Le delta de cette équation du second degré est :

$\Delta=(9-7i)^2-4\times5\times2(1-3i)=-8-6i$

Il nous faut extraire la racine carrée de ce delta :

$$\begin{cases} x^2-y^2=-8 & \text{donc } |\,x\,|<|\,y\,| \\ 2xy=-6 & \text{donc } x \text{ et } y \text{ sont de signes différents.} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{8^2+6^2}=10 \\ x^2y^2=9 \end{cases} \rightarrow X^2-10X+9=0 \rightarrow (X-9)(X-1)=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=\pm1 \\ y=\pm3 \end{cases} \rightarrow \text{ compte tenu des conditions on retient } \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \rightarrow (1-3i)$$

Nous pouvons maintenat écrire :

$$z=\frac{(9-7i)\pm(1-3i)}{10} \rightarrow \begin{cases} z_1=1-i \\ z_2=\dfrac{4-2i}{5} \end{cases}$$

Résolu le 15 novembre 2005.

EXALG207 – Louvain, septembre 2005.

Résoudre dans les réels et discuter en fonction du paramètre réel *a*, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{x-a}{3y-2a} = \dfrac{1}{3a^2} \\ \dfrac{x+a}{3y+4a} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

CE : ① $a \neq 0$

② $y \neq +\frac{2}{3}a$

③ $y \neq -\frac{4}{3}a$

Transformation du système

Sous les conditions ci-dessus, le système est équivalent à :

$$\begin{cases} 3a^2x - 3a^3 &= 3y - 2a \\ 3x + 3a &= 3y + 4a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2x - 3y &= a(3a^2 - 2) \\ 3x - 3y &= a \end{cases} \qquad \textbf{(II)}$$

Discussion et résolution

C'est un système linéaire de deux équations en deux inconnues. Le déterminant de la matrice des coefficients est :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3a^2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -9\begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -9(a^2 - 1) = -9(a-1)(a+1)$$

Donc : $\det A = 0 \Leftrightarrow a \in \{-1, +1\}$

1^{er} cas : $\boldsymbol{a = +1}$

Le système (II) devient :

$$\begin{cases} 3x - 3y & = & 1 \\ 3x - 3y & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y & = & \frac{1}{3} \\ x - y & = & \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ce système est *simplement indéterminé* avec comme solution : $\left\{\left(x\,;x-\frac{1}{3}\right)\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$

Ce sont également les solutions de (I) pour le cas $a = +1$, mais suite aux conditions d'existence ② et ③ il faut exclure $y = x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $y = x - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$, c'est-à-dire $x = +1$ et $x = -1$:

$$S = \left\{\left(x\,;x-\frac{1}{3}\right)\middle|\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,,+1\}\right\}$$

2^e cas : $\boldsymbol{a = -1}$

Le système (II) devient :

$$\begin{cases} 3x - 3y & = & -1 \\ 3x - 3y & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y & = & -\frac{1}{3} \\ x - y & = & -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ce système est *simplement indéterminé* avec comme solution : $\left\{\left(x\,;x+\frac{1}{3}\right)\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$

Ce sont également les solutions de (I) pour le cas $a = -1$, mais suite aux conditions d'existence ② et ③ il faut exclure $y = x + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $y = x + \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$, c'est-à-dire $x = +\frac{1}{3}$ et $x = -\frac{5}{3}$:

$$S = \left\{\left(x\,;x+\frac{1}{3}\right)\middle|\, x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{3}\,,+\frac{1}{3}\right\}\right\}$$

3^e cas : $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,,0\,,+1\}}$

Le système est déterminé et donc cramerien :

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 3a^3 - 2a & -3 \\ a & -3 \end{vmatrix} = -3(3a^3 - 2a - a) = -9a(a^2 - 1) = -9a(a-1)(a+1)$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 3a^2 & 3a^3 - 2a \\ 3 & a \end{vmatrix} = 3(a^3 - 2a^3 + 2a) = -6a(a^2 - 1) = -6a(a-1)(a+1)$$

avec comme solution :

$$S = \left\{\left(a\,;\frac{2}{3}a\right)\right\}$$

Cette solution est à rejeter à cause de la condition d'existence ②.

Conclusion :

Si $a = +1$, alors $S = \left\{\left(x\,;x-\frac{1}{3}\right)\middle|\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\,,+1\}\right\}$;

si $a = -1$, alors $S = \left\{\left(x\,;x+\frac{1}{3}\right)\middle|\, x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{3}\,,+\frac{1}{3}\right\}\right\}$;

sinon, $S = \emptyset$

Résolu le 15 novembre 2005. Modifié le 27 janvier 2012 (Jan Frans Broeckx)

EXALG208 – Louvain, septembre 2005.

Une personne souhaite partager un certain nombre de pièces d'or entre ses enfants, de telle sorte qu' :

- Elle demande au premier de prendre 1 pièce et le septième du reste.
- Elle demande ensuite au second de prendre 2 pièces d'or et le septième du reste
- Cela fait, le troisième prend 3 pièces d'or et le septième du reste
- Et ainsi de suite jusqu'au dernier qui prend tout le reste.

Or, le partage est heureusement réalisé de telle sorte que chacun des enfants reçoit le même nombre de pièces d'or.
Combien y avait-il de pièces d'or à partager et combien y avait-il d'enfants ?

Soit x le nombre de pièces d'or

Le premier enfant prend : $1+\dfrac{x-1}{7}$.

Il reste : $x-1-\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{6}{7}(x-1)$

Le deuxième enfant prend : $2+\dfrac{\frac{6(x-1)}{7}-2}{7}$

Comme le partage est de manière égale :

$$\rightarrow\ 1+\frac{x-1}{7}.=2+\frac{\frac{6(x-1)}{7}-2}{7}\quad\rightarrow x=36$$

On a donc le tableau suivant :

Enfant	Prise	Reste
1	$1+5=6$	30
2	$2+4=6$	24
3	$3+3=6$	18
4	$4+2=6$	12
5	$5+1=6$	6
6	$6+0=0$	0

Il y a donc 36 pièces et 6 enfants

Résolu le 15 novembre 2005.

EXALG209 – Liège, septembre 2005.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{a-1}{x} & + & \dfrac{a}{y} & + & \dfrac{1}{z} & = & a \\ \dfrac{a-2}{x} & + & \dfrac{a-1}{y} & + & \dfrac{1}{z} & = & 1-a \\ \dfrac{1}{x} & + & \dfrac{1}{y} & - & \dfrac{a-1}{z} & = & 1 \end{array}$$

Suggestion : Poser $\frac{1}{x}=X,\ \frac{1}{y}=Y,\ \frac{1}{z}=Z$

En utilisant la suggestion, on obtient le système

$$(a-1)X+aY+Z=a$$
$$(a-2)X+(a-1)Y+Z=1-a$$
$$X+Y-(a-1)Z=1$$

En soustrayant les deux dernières équations de la première, on obtient

$(a-1)Z=2(a-1),$ ce qui incite à traiter séparément le cas $a=1$, qui se réduit à

$Y+Z=1$

$-X+Z=0$ et admet pour solution le triplet $\{X=\lambda, Y=1-\lambda, Z=\lambda\}$, λ quelconque

$Y+Y=1$

Si $a\neq 0,$ on a $Z=2$ et $X+Y=2a-1,$ d'où on tire

$X=2a^2-2a+2$

$Y=-2a^2+4a-3$ $\rightarrow$ le triplet $\{X=2a^2-2a+2, Y=-2a^2+4a-3, Z=2\}$

On revient au système initial. Si $a=1,$ le triplet solution est

$\left\{x=\dfrac{1}{\lambda}, y=\dfrac{1}{1-\lambda}, z=\dfrac{1}{\lambda}\right\}$ λ distinct de 0 et de 1

Si $a\neq 1,$ le triplet solution est $\left\{x=\dfrac{1}{2a^2-2a+2}, y=\dfrac{1}{-2a^2+4a-3}, z=\dfrac{1}{2}\right\}.$

Aucune restriction sur le réel a n'est nécessaire, puisque les dénominateurs,

respectivement égaux à $a^2+1(a-1)^2$ et $-\left(1+2(a-1)^2\right)$ ne s'annulent jamais.

Le 15 novembre 2005.

Référence : http://www.montefiore.ulg.ac.be/services/ia/Algebre.pdf