

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 22

EXALG220 – EXALG229

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot
Benoît Baudalet. Steve Tumson.
Nicole Berckmans. Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard.

Juillet 08

EXALG220 – Bruxelles, septembre 2005.

Calculer le terme indépendant dans :

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$$

Le terme général du développement s'écrit :

$$C_6^i (-1)^{6-i} x^{6-i} \left(\frac{1}{x}\right)^i = C_6^i (-1)^{6-i} x^{6-2i}$$

Le terme sera indépendant si : $6 - 2i = 0 \rightarrow i = 3$

$$\text{Le terme est donc } C_6^i (-1)^{6-i} x^{6-2i} = C_6^3 (-1)^3 = -20$$

Le 15 décembre 2005.

EXALG221 – Bruxelles, septembre 2005.

Résoudre dans \mathbb{R}^2 , en discutant par rapport au paramètre réel m , le système :

$$\begin{cases} m^2(x - y) + m(2x + 3y) - 3 = 0 \\ m^2(x - y) - m(3x + 2y) + 2 = 0 \end{cases}$$

Éliminons directement le cas : $m = 0$, pour lequel le système est impossible.

Récrivons le système :

$$\begin{cases} (m^2 + 2m)x + (-m^2 + 3m)y = 3 \\ (m^2 - 3m)x - (m^2 + 2m)y = -2 \end{cases}$$

Calculons les Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} m^2 + 2m & -m^2 + 3m \\ m^2 - 3m & -(m^2 + 2m) \end{vmatrix} = 5m^2(1 - 2m)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -m^2 + 3m \\ -2 & -(m^2 + 2m) \end{vmatrix} = 5m(1 - m)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m^2 + 2m & 3 \\ m^2 - 3m & -2 \end{vmatrix} = 5m^2(1 - 2m)$$

Si : $m = \frac{1}{2}$ le système devient :

$$\begin{cases} \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}y = 3 \\ -\frac{5}{4}x - \frac{5}{4}y = -2 \end{cases} \quad \text{système impossible}$$

Si : $m \neq 0$, $m \neq \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-5m^2}{5m^2(1-2m)} = \frac{1}{2m-1} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5m(1-m)}{5m^2(1-2m)} = \frac{1-m}{m(1-2m)} \end{cases}$$

Le 15 décembre 2005.

EXALG222 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005, série 1.

Résoudre dans les réels, en discutant par rapport aux paramètres réels a et b , l'équation suivante.

$$\frac{x-a}{2} = \frac{(x-b)^2}{2x-a}$$

$$CE : x \neq \frac{a}{2}$$

$$1) \underline{a = b}$$

$$\text{L'équation devient : } \frac{x-a}{2} = \frac{(x-a)^2}{2x-a}$$

- si $x = a$, on obtient $0 = 0$ et l'équation est vérifiée
- si $x \neq a$, on peut simplifier par $x - a$

$$\rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x-a}{2x-a} \rightarrow 2x-a = 2x-2a$$

* si $a = 0$, l'équation est indéterminée

* si $a \neq 0$, l'équation est impossible

$$2) \underline{a \neq b}$$

$$\text{L'équation devient : } 2x^2 - 2ax - ax = a^2 = 2x^2 - 4bx - 2b^2$$

$$\rightarrow 4bx - 3ax = 2b^2 - a^2 \rightarrow (4b - 3a)x = 2b^2 - a^2$$

- si $b = \frac{3}{4}a \rightarrow 0x = \frac{a^2}{8}$

* si $a = 0$ (donc $b = 0$), cas déjà traité

* si $a \neq 0$, équation impossible

- si $b \neq \frac{3}{4}a \rightarrow x = \frac{2b^2 - a^2}{4b - 3a}$

Mais on doit avoir $x \neq \frac{a}{2}$ en vertu de la CE

$$\rightarrow \frac{2b^2 - a^2}{4b - 3a} = \frac{a}{2} \rightarrow 4b^2 - 2a^2 = 4ab - 3a^2 \rightarrow 4b^2 - 4ab + a^2 = 0 \rightarrow (2b - a)^2 = 0$$

Ce qui donne $b = \frac{a}{2}$ comme valeur particulière.

$$\text{On remplace dans l'équation de départ : } \frac{x-a}{2} = \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{2x-a}$$

$$\rightarrow 2x^2 - 2ax - ax + a^2 = 2x^2 - 2ax + \frac{a^2}{2} \rightarrow x = \frac{a}{2} \text{ ce qui est interdit}$$

et donc il faut comme condition : $b \neq \frac{a}{2}$

Conclusion

$a = b = 0$ éq indéterminée

$a = b \neq 0$ éq impossible

$a \neq b$

$b = \frac{3}{4}a$ $a = 0$ voir $a = b = 0$

$a \neq 0$ éq impossible

$b \neq \frac{3}{4}a$ $b = \frac{a}{2}$ éq impossible (CE)

$b \neq \frac{a}{2}$ $x = \frac{2b^2 - a^2}{4b - 3a}$

Le 1 avril 2005.

EXALG223 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005, série 1.

Résoudre dans les réels, l'inéquation suivante :

$$x - |5x - 2| < 0$$

1) $\underline{5x - 2 > 0} \rightarrow x > \frac{2}{5}$ (1)

Dans ce cas : $|5x - 2| = 5x - 2$

L'inéquation devient : $x - 5x + 2 < 0 \rightarrow -4x < -2 \rightarrow x > \frac{1}{2}$

Ce qui vérifie la condition (1) : $x > \frac{1}{2}$

2) $\underline{5x - 2 < 0} \rightarrow x < \frac{2}{5}$ (2)

Dans ce cas : $|5x - 2| = -5x + 2$

L'inéquation devient : $x + 5x - 2 < 0 \rightarrow 6x < 2 \rightarrow x < \frac{1}{3}$

Ce qui vérifie la condition (2)

Conclusion : $x \in \mathbb{R} : \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

Le 1 avril 2005.

EXALG224 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005, série 1.

Soit $P(z) = z^2 + pz + q$ un polynôme en z , où z appartient à l'ensemble des complexes et, où les coefficients p et q sont réels.

Déterminez la relation qui doit exister entre p et q pour que $P(z)$ ait une racine complexe z dont la partie imaginaire est égale à 20. Exprimez q comme une fonction de p .

Solution proposée par Nicole Berckmans

$z = x + 20i$ où $x \in \mathbb{R}$ est racine de $P(z)$ si et seulement si

$$(x + 20i)^2 + p(x + 20i) + q = 0$$

$$\text{Partie réelle : } x^2 - 400 + px + q = 0 \quad (1)$$

$$\text{Partie imaginaire : } 40x + 20p = 0 \quad (2)$$

De (2) on tire la valeur réelle de x que l'on introduit dans (1).

On obtient :
$$q = \frac{p^2 + 1600}{4}$$

Solution proposée par Jacques COLLOT

Soit donc le polynôme : $P(z) = z^2 + pz + q$

$$\text{Ces racines sont données par : } z = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (1)$$

Puisque p est réel la partie imaginaire est donc générée par le deuxième terme.

$$\rightarrow \frac{p^2 - 4q}{4} = -20^2 \rightarrow q = \frac{p^2 + 1600}{4}$$

En remplaçant dans (1), on trouve bien : $z = -\frac{p}{2} \pm 20i$

Le 1 avril 2005. Modifié le 28 août 2012 (Nicole Berckmans)

EXALG225 – Louvain, juillet 2005, série 2.

Résoudre dans les réels, en discutant par rapport au paramètre réel a , l'équation :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = a$$

$$\text{CE : } \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \rightarrow x \geq 2$$

1) soit $a < 0$

Il faut donc : $\sqrt{x+1} < \sqrt{x-2} \rightarrow x+1 < x-2$: ce qui est impossible

2) soit $a = 0$

Il faut donc : $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-2} \rightarrow x+1 = x-2$: ce qui est impossible

3) soit $a > 0$ (1)

Remettons l'équation sous la forme : $\sqrt{x+1} = a + \sqrt{x-2}$

$$\rightarrow x+1 = a^2 + 2a\sqrt{x-2} + x-2 \rightarrow 2a\sqrt{x-2} = 3-a^2 \quad (2)$$

Cette relation implique : $3-a^2 \geq 0 \rightarrow -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$

Ce qui avec la condition (1) donne : $0 < a \leq \sqrt{3}$

$$\text{Elevons (2) au carré : } \rightarrow 4a^2(x-2) = (3-a^2)^2 \rightarrow x = \frac{(3-a^2)^2}{4a^2} + 2$$

Mais on doit encore vérifier : $x \geq 2$

$$\rightarrow \frac{(3-a^2)^2}{4a^2} + 2 \geq 2 \text{ ce qui est toujours vérifié.}$$

$$\text{Conclusion : } x = \frac{(3-a^2)^2}{4a^2} + 2 \text{ avec } 0 < a \leq \sqrt{3}$$

Le 1 avril 2005.

EXALG226 – Louvain, juillet 2005, série 2.

Résoudre dans les complexes, l'équation

$$z^2 = z(2i-1) + 2i$$

Exprimez votre réponse sous la forme $a + ib$.

Calculons le Δ : $\Delta = (2i-1)^2 + 8i = -3 + 4i$

Il nous faut calculer la racine carrée de ce Δ

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a^2 b^2 = 4 \end{cases} \rightarrow X^2 - 5X + 4 = 0 \rightarrow (X-1)(X-4) = 0$$

1) $X^2 = 1$

• $\rightarrow X = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \rightarrow \sqrt{\Delta} = 1 + 2i$

• $\rightarrow X = -1 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \rightarrow \sqrt{\Delta} = -1 - 2i$

2) $X^2 = 4$

• $\rightarrow X = 2 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ A rejeter car $a^2 - b^2 = -3$ donc $|a| < |b|$

• $\rightarrow X = -2 \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ A rejeter car $|a| < |b|$

Finalement, la solution de l'équation est :

$$z = \frac{+(2i-1) \pm (1+2i)}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 2i \end{cases}$$

Le 1 avril 2005.

EXALG227 – Louvain, juillet 2005, série 2.

Résoudre, dans les nombres réels, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x - |y + 1| = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases}$$

1) $y > -1$

Dans ce cas le système s'écrit : $\begin{cases} x - y - 1 = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{cases}$

$$\rightarrow (x-3)(x+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 1 \\ x = -4 \rightarrow y = -6 \text{ A rejeter} \end{cases}$$

2) $y < -1$

Dans ce cas le système s'écrit : $\begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ x^2 + y = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 - x - 10 = 0 \end{cases}$

$$\rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{41}}{2} \rightarrow y = -\frac{1 + \sqrt{41}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{41}}{2} \rightarrow y = -\frac{1 - \sqrt{41}}{2} > -1 \text{ A rejeter} \end{cases}$$

Le 1 avril 2005.

EXALG228 – Louvain, juillet 2005, série 2.

Michel part du point A vers le point B au même instant où Charles part du point B vers le point A . Ils marchent à vitesses constantes. Quand ils se croisent, Michel a parcouru 200 m de plus que Charles. Ils poursuivent leur marche sans s'arrêter, mais avec des vitesses respectives diminuées de moitié. Après leur rencontre, il faut encore 8 minutes pour que Michel arrive ainsi en B tandis qu'il faut encore 18 minutes pour que Charles arrive en A .

Quelle distance y a-t-il entre A et B et combien de temps après le départ se croisent-ils ?

Soient :

- a La distance parcourue par Michel jusqu'au point de croisement
- b La distance parcourue par Charles jusqu'au point de croisement
- c La distance entre A et B
- v_a La vitesse de Michel jusqu'au point de croisement (m/min)
- v_b La vitesse de Charles jusqu'au point de croisement (m/min)
- t Le temps jusqu'au point de croisement

On a

$$a + b = z \rightarrow 2b + 200 = z \quad (1) \quad \begin{array}{l} \text{Michel a parcouru } 200m \text{ de plus que Charles} \\ \text{Michel met 8 minutes pour faire le reste du trajet} \end{array}$$

$$v_a t + \frac{v_a}{2} \cdot 8 = z \quad (2) \quad \begin{array}{l} \text{à la vitesse } \frac{v_a}{2} \\ \text{Charles met 18 minutes pour faire le reste du trajet} \end{array}$$

$$v_b t + \frac{v_b}{2} \cdot 18 = z \quad (3) \quad \begin{array}{l} \text{à la vitesse } \frac{v_b}{2} \end{array}$$

$$\text{De (2) et (3)} \rightarrow v_a t + 4v_a = v_b + 9v_b \quad (4)$$

Or le trajet b que Charles fait en t minutes, Michel le fait en 8 minutes

$$\rightarrow t v_b = 8 \cdot \frac{v_a}{2} \rightarrow t = \frac{4v_a}{v_b} \quad (5)$$

$$\text{On remplace dans (4)} \rightarrow \frac{4v_a^2}{v_b} + 4v_a = v_b \frac{4v_a}{v_b} + 9v_b \rightarrow 4v_a^2 = 9v_b^2 \rightarrow v_a = \frac{2v_b}{3} \quad (6)$$

$$\text{On injecte (6) dans (5)} \rightarrow t = 4 \frac{\frac{3}{2}v_b}{v_b} = 6 \text{ min}$$

$$\text{D'autre part, } b = t v_b = 6 \cdot \frac{2}{3} v_a = 4v_a$$

$$\text{De (1) et (2)} \rightarrow 2b + 200 = v_a t + 4v_a \rightarrow 8v_a + 200 = 6v_a + 4v_a \rightarrow v_a = 100 \text{ m/min}$$

$$\text{Le reste est facile} \rightarrow v_b = 66.7 \text{ m/min}$$

$$\text{et } a = 6 \cdot 100 = 600 \text{ m} ; \quad b = 8 \cdot 50 = 400 \text{ m} ; \quad c = 1000 \text{ m}$$

Le 1 avril 2005.