Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 23

EXALG230 – EXALG239

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG230 – Liège, juillet 2006.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel *a* est un paramètre réel.

$$\begin{cases} x - y + z = 1-a \\ x + y + az = 0 \\ ax + y + z = a-1 \end{cases}$$

Calculons tous les Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)(a-3) \quad , \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1-a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ a-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(a-1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 0 & a \\ a & a-1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+2) \quad , \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)$$

1) $\underline{a=1}$

Le système devient : $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$ Système simplement indeterminé.

2) $\underline{a=-3}$

Le système devient :

$\begin{cases} x-y+z=4 \\ x+y-3z=0 \\ -3x+y+z=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-z=2 \\ x-z=1 \end{cases}$ Système impossible.

3) <u>Dans les autres cas</u>

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{2}{x+3} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{(a-1)(a+2)}{a+3} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = -\dfrac{a+1}{a+3} \end{cases}$$

Le 18 juillet 2006.

EXALG231 – Liège, juillet 2006.

- Trouver tous les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$(z+2\cos\alpha)^2 = \frac{1}{z^2}$$

- Trouver tous les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$(z+2\cos\alpha)^4 = \frac{1}{z^4}$$

---

1) Il nous suffit de résoudre : $z+2\cos\alpha = \pm\frac{1}{z}$

- $z+2\cos\alpha = \frac{1}{z} \to z^2+2\cos\alpha.\,z-1=0 \to \begin{cases} z_1 = -\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+1} & \text{Toujours réel} \\ z_2 = -\cos\alpha-\sqrt{\cos^2\alpha-1} & \text{Toujours réel} \end{cases}$
- $z+2\cos\alpha = -\frac{1}{z} \to z^2+2\cos\alpha.\,z+1=0 \to \begin{cases} z_3 = -\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha-1} = -\cos\alpha+i.\sin\alpha \\ z_4 = -\cos\alpha-\sqrt{\cos^2\alpha-1} = -\cos\alpha-i\sin\alpha \end{cases}$

2) L'équation devient : $(z+2\cos\alpha)^2 = \pm\frac{1}{z^2}$

- $(z+2\cos\alpha)^2 = +\frac{1}{z^2}$ Voir la résolution au point 1)
- $(z+2\cos\alpha)^2 = -\frac{1}{z^2} \to z+2\cos\alpha = \pm\frac{i}{z}$

  * $z+2\cos\alpha = \frac{i}{z} \to z^2+2\cos\alpha.z-i=0 \to \begin{cases} z_5 = -\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+i} \\ z_6 = -\cos\alpha-\sqrt{\cos^2\alpha+i} \end{cases}$

  * $z+2\cos\alpha = -\frac{i}{z} \to z^2+2\cos\alpha.z+i=0 \to \begin{cases} z_7 = -\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha-i} \\ z_8 = -\cos\alpha-\sqrt{\cos^2\alpha-i} \end{cases}$

Cependant, laisser un *i* en dessous d'une racine n'est pas vraiment une bonne idée.

Calculons : $\sqrt{\cos^2\alpha + i}$

$$\sqrt{\cos^2\alpha + i} = a + bi \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \cos^2\alpha \\ 2ab = i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{\cos^4\alpha + 1} \\ a^2 + b^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow X^2 - \sqrt{\cos^4\alpha} + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow X = \frac{\sqrt{\cos^2 + 1} \pm \cos^2\alpha}{2}$$

$$\rightarrow a + ib = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} + \cos^2\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} - \cos^2\alpha}{2}}\right)$$

De même pour $\sqrt{\cos^2\alpha + i}$

$$a + ib = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} + \cos^2\alpha}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} - \cos^2\alpha}{2}}\right)$$

Finalement, les huit solutions de la deuxième équation sont

$$z_1 = -\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 1} \qquad z_5 = -\cos\alpha + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} + \cos^2\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} - \cos^2\alpha}{2}}\right)$$

$$z_2 = -\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha + 1} \qquad z_6 = -\cos\alpha - \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} + \cos^2\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} - \cos^2\alpha}{2}}\right)$$

$$z_3 = -\cos\alpha + i\sin\alpha \qquad z_7 = -\cos\alpha + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} + \cos^2\alpha}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} - \cos^2\alpha}{2}}\right)$$

$$z_4 = -\cos\alpha - i\sin\alpha \qquad z_7 = -\cos\alpha - \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} + \cos^2\alpha}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 + 1} - \cos^2\alpha}{2}}\right)$$

Le 18 juillet 2006.. Modifié le 21 septembre 06

EXALG232 – Liège, juillet 2006.

- Trouver des nombres *A*, *B* et *C* tel que

$$\frac{1}{(x-1)x(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}$$

- Ces nombres sont-ils uniques ? On justifiera la réponse.
- Déduire de ce qui précède la valeur de

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+....+\frac{1}{(k-1)k(k+1)} \qquad \text{pour } k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$$

On met le deuxième membre au même dénominateur, et on extrait le numérateur obtenu

$$Ax(x+1)+B(x-1)(x+1)+Cx(x-1)$$
$$= Ax^2 + AX + Bx^2 - B + Cx^2 - Cx$$
$$=(A+B+C)x^2+(A-C)x-B$$

Ce polynôme doit être identique à 1, ce qui conduit au système

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-C=0 \\ -B=1 \end{cases} \qquad \text{Le déterminant de ce système est : } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Il n'y a donc qu'une seule solution $\begin{cases} A=C=\dfrac{1}{2} \\ B=-1 \end{cases}$ et elle est unique

Construisons le tableau suivant

$$\begin{array}{lcccc}
\dfrac{1}{1.2.3} = & \boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1}} & \boxed{-\dfrac{1}{2}} & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3} \\
\dfrac{1}{2.3.4} = & \boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4} \\
\dfrac{1}{3.4.5} = & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{5} \\
\dfrac{1}{4.5.6} = & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{6} \\
\dfrac{1}{5.6.7} = & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{5} & -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{7}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc}
\dfrac{1}{(k-3)(k-2)(k-1)} = & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k-3} & -\dfrac{1}{k-2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k-1} \\
\dfrac{1}{(k-2)(k-1)k} = & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k-2} & -\dfrac{1}{k-1} & \boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k}} \\
\dfrac{1}{(k-1)k(k-1)} = & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k-1} & \boxed{-\dfrac{1}{k}} & \boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k+1}}
\end{array}$$

Si on fait la somme, on voit que toute une série de termes disparaissent. Il reste seulement les termes encadrés. Soit S la somme cherchée

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)}$$
$$=\frac{k(k+1)-2(k+1)+2k}{4k(k+1)}=\frac{k^2+k-2k-2+2k}{4k(k+1)}=\frac{k^2+k-2}{4k(k+1)}=\boxed{\frac{(k+2)(k-1)}{4k(k+1)}}$$

Note : Remarquons que cette suite est convergente et $\lim\limits_{k\to\infty} S=\dfrac{1}{4}$

Le 18 juillet 2006.

EXALG233 – Mons juillet 2006.

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4x^2+3|\,y\,|=31 \\ -2x^2+7|\,y\,|=27 \end{cases}$$

Solution proposée par Steve Tumson

- Si $y>0$

$$\begin{cases} 4x^2+3y=31 \\ -2x^2+7y=27 \end{cases} \xrightarrow{L_1+2L_2} 17y=85 \Leftrightarrow y=5$$

Et donc

$$4x^2+3.\frac{85}{17}=31 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$$

$$\rightarrow \boxed{S=\{(2;5);(-2;5)\}}$$

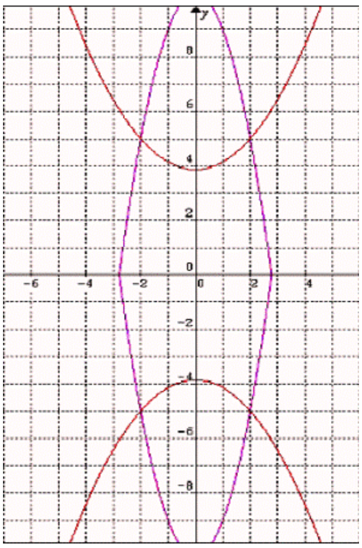
- Si $y<0$ (n'a de sens que pour la première équation, la deuxième étant un second degré toujours positif)

$$\begin{cases} 4x^2-3y=31 \\ -2x^2-7y=27 \end{cases} \xrightarrow{L_1+2L_2} -17y=85 \Leftrightarrow y=-\frac{85}{17}=-5$$

Et donc

$$4x^2+3.5=31 \Leftrightarrow 4x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm 2$$

$$\rightarrow \boxed{S=\{(-2,-5);(2;-5)\}}$$



Le 16 septembre 2006. Modifié le 24 février 07. (Steve Tumson)

EXALG234 – Liège, septembre 2006.

Résoudre le système d'équations suivant, dans lequel *a* est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x + ay - (a-2)z = 1 \\ ax + a^2y - 3z = a \\ (a-1)x + 6y + (a-5)z = 2 \end{cases}$$

Calculons les Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & -(a-2) \\ a & a^2 & -3 \\ a-1 & 6 & a-5 \end{vmatrix} = (a+1)(a+2)(a-3)^2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & a & -(a-2) \\ a & a^2 & -3 \\ 2 & 6 & a-5 \end{vmatrix} = 2(a+1)(a-3)^2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -(a-2) \\ a & a & -3 \\ a-1 & 2 & a-5 \end{vmatrix} = (a+1)(a-3)^2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a^2 & a \\ a-1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = a(a-2)(a-3)$$

Discussion

1) $\underline{a=-1}$ Le système devient : $\begin{cases} x-y+3z=1 \\ -x+y-3z=-1 \\ -2x+6y-6z=2 \end{cases}$

ce qui donne un système simplement indéterminé : $\begin{cases} x=2-3z \\ y=1 \end{cases}$

2) $\underline{a=-2}$ Le système devient : $\begin{cases} x-2y+4z=1 \\ -2x+4y-3z=-2 \\ -3x+6y-7z=2 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} -3x+6y-7z=-3 \\ -3x+6y-7z=2 \end{cases}$ C'est-à-dire un système impossible.

3) $\underline{a=3}$ Le système devient : $\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 3x+9y-3z=3 \\ 2x+6y-2z=2 \end{cases}$

ce qui donne un système doublement indéterminé : $\{x=1-3y+z$

$d)$ <u>Dans les autres cas</u> $\left(a \in \mathbb{R} \setminus \{-2;-1;3\}\right)$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2(a+1)(a-3)^2}{(a+1)(a+2)(a-3)^2} = \dfrac{2}{a+2} \\ y = \dfrac{(a-3)^2(a+1)}{(a+1)(a+2)(a-3)^2} = \dfrac{1}{a+2} \\ z = \dfrac{a(a-2)(a-3)}{(a+1)(a+2)(a-3)^2} = \dfrac{a(a-2)}{(a+1)(a+2)(a-3)} \end{cases}$$

Le 24 décembre 2006

EXALG234 – **Liège, septembre 2006.**

Dans $\mathbb{R}$, résoudre l'inéquation:

$$\frac{1}{1+\sqrt{|x-1|}} < x$$

Le premier membre est toujours positif. Il n'y a donc pas de conditions d'existence et cela entraîne aussi que $x > 0$.

a) <u>Soit $x > 1$</u> $\rightarrow \dfrac{1}{1+\sqrt{|x-1|}} = \dfrac{1}{1+\sqrt{x-1}} < \dfrac{1}{1+\sqrt{1-1}} < x$

L'inéquation est donc toujours vérifiée

b) <u>Soit $x = 1$</u> $\rightarrow \dfrac{1}{1+\sqrt{|x-1|}} = 1$; Et l'inéquation n'est pas vérifiée.

c) <u>Soit $0 < x < 1$</u> Dans ce cas : $|x-1| = 1-x$

$$\rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} < x \rightarrow 1 < x + x\sqrt{1-x} \rightarrow 1-x < x\sqrt{1-x} \rightarrow (1-x)^2 < \left(x\sqrt{1-x}\right)^2$$

$$\rightarrow 1-2x+x^2 < x^2 - x^3 \rightarrow x^3 - 2x + 1 < 0$$

On factorise par Horner : $\rightarrow$

	1		−2	1
1		1	1	1
	1	1	−1	0

$$\rightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right) < 0 \rightarrow (x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0$$

D'où le tableau de signe :

		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq 0.618$		1	
$x-1$	−	−	−	−	−	0	+
x^2+x-1	+	0	−	0	+	+	+
	−	0	+	0	−	0	0

Autrement dit : $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{S: \ ]0.618; \rightarrow \ \backslash\{1\}}$

Le 24 décembre 2006

EXALG236 – Bruxelles, juillet 2006.

a) Déterminer toutes les valeurs réelles de k telles que

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 8x + 20$$

est divisible par $x^2 + k^2$

b) Pour ces valeurs de k, déterminer les racines complexes du polynôme P.

---

a) Première méthode

Effectuons la division par $x^2 + k^2$

$$\begin{array}{ccccc|l}
x^4 & -2x^3 & +9x^2 & -8x & +20 & x^2+k^2 \\
\underline{x^4} & & \underline{+k^2x^2} & & & \overline{} \\
 & -2x^3 & +\left(9-k^2\right)x^2 & & & x^2-2x+\left(9-k^2\right) \\
 & \underline{-2x^3} & & -2k^2x & & \\
 & & +\left(9-k^2\right)x^2 & -\left(8-2k^2\right)x & & \\
 & & \underline{+\left(9-k^2\right)x^2} & & +\left(9-k^2\right)k^2 & \\
 & & & -\left(8-2k^2\right)x & 20-\left(9-k^2\right)k^2 &
\end{array}$$

Donc $x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 8x + 20 = \left(x^2 - 2x + \left(9-k^2\right)\right)\left(x^2+k^2\right) - \left(8-2k^2\right)x + 20 - \left(9-k^2\right)k^2$

Il faut que le reste soit nul $\rightarrow \begin{cases} 8-2k^2 = 0 \\ k^4 - 9k^2 + 20 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{k = \pm 2}$

b) $P(x) = \left(x^2 - 2x + 5\right)\left(x^2+4\right)$

1) $x^2 - 2x + 5 = 0 \rightarrow x = 1 \pm 2i$

2) $x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2i$

Et finalement, $\boxed{\text{Sol}: \{\,1-2i; 1+2i; 2i; -2i\}}$

a) Deuxième méthode : Méthode des coefficients indéterminés.

Le polynôme doit pouvoir se mettre sous la forme

$P(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\left(x^2+k^2\right) = ax^4 + bx^3 + \left(c + ak^2\right)x^2 + bk^2x + ck^2$

Après identification avec le polynôme de départ, on tire le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c + ak^2 = 9 \rightarrow \boxed{k = \pm 2} \\ bk^2 = -8 \\ ck^2 = 20 \end{cases}$$

Le reste est le même.

Le 18 juillet 2006.

EXALG237 – Bruxelles, juillet 2006.

Résoudre dans $\Re$ l'inéquation $|2x|>|2-x^2|$

Construisons un tableau de signe pour définir les différents cas.

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
Cas	1	2	3	4	5	6	7

Cas 1 : $x<-\sqrt{2}$

L'inéquation peut s'écrire : $-2x>x^2-2 \rightarrow x^2+2x-2>0$

Le premier membre a pour racines : $x=-1\pm\sqrt{3}$.

On en déduit la solution : $-1-\sqrt{3}<x<-\sqrt{2}$

Cas 2 : $x=-\sqrt{2}$

L'inéquation est vérifiée : $2\sqrt{2}>0$

Cas 3 : $-\sqrt{2}<x<0$

L'inéquation peut s'écrire : $-2x>2-x^2 \rightarrow x^2-2x-2>0$

Le premier membre a pour racines : $x=1\pm\sqrt{3}$.

On en déduit la solution : $-\sqrt{2}<x<1-\sqrt{3}$

Cas 4 : $x=0$ L'inéquation n'est pas vérifiée car $0<2$

Cas 5 : $0<x<\sqrt{2}$

L'inéquation peut s'écrire : $2x>2-x^2 \rightarrow x^2+2x-2>0$

Le premier membre a pour racines : $x=-1\pm\sqrt{3}$.

On en déduit la solution : $-1+\sqrt{3}<x<\sqrt{2}$

Cas 6 : $x=\sqrt{2}$ L'inéquation est vérifiée car $2\sqrt{2}>0$

Cas 7 : $x>\sqrt{2}$

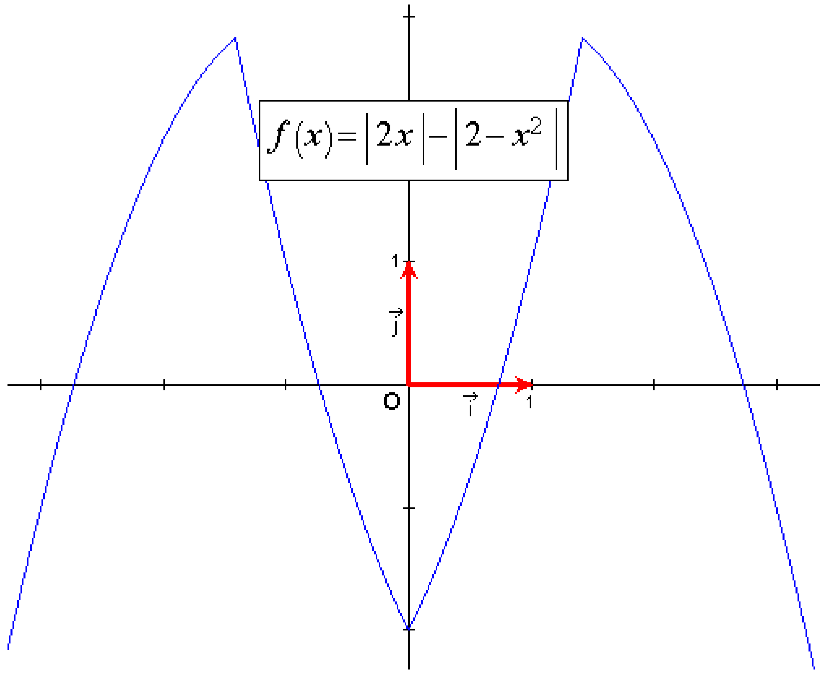
L'inéquation peut s'écrire : $2x>x^2-2 \rightarrow x^2-2x-2<0$

Le premier membre a pour racines : $x=1\pm\sqrt{3}$.

On en déduit la solution : $\sqrt{2}<x<1+\sqrt{3}$

Conclusion

$$\boxed{S: \quad x\in \left]-1-\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right[\cup \left]-1+\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right[}$$



Le 22 janvier 2007.

EXALG238 – Bruxelles, juillet 2006.

On considère

$$f(x)=\left(\frac{x^4-1}{16x^4-9x^2}:\frac{2x^2+2}{4x+3}\right)\left(4x+\frac{x}{x-1}\right)+2(x+2)-\frac{5}{x}$$

a) Déterminer le domaine de définition de *f*

b) Résoudre *f* (*x*) dans $\Re$

Domaine

$$a)\,16x^4-9x^2\neq 0 \;\rightarrow\; x^2(4x-3)(4x+3)\neq 0\rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq \frac{3}{4}\\ x\neq -\frac{3}{4}\end{cases}$$

$b)\ 2x^2+2\neq 0$ Toujours vrai

$c)\ 4x+3\neq 0\rightarrow x\neq -\frac{3}{4}$

$d)\ x-1\neq 0 \;\rightarrow x\neq 1$

$e)\ x\neq 0$

Conclusion : Si $P(x)$ désigne la polynôme donné

Dom $P(x)$: $\Re\setminus\left\{-\frac{3}{4};1;0;\frac{3}{4}\right\}$

Factorisons et réduisons :

$$P(x)=\frac{x^4-1}{16x^4-9x^2}.\frac{4x+3}{2x^2+2}.\left(4x+\frac{x}{x-1}\right)+2(x+2)-\frac{5}{x}$$

$$=\frac{\cancel{(x^2+1)}\cancel{(x-1)}(x+1)\cancel{(4x+3)}}{x^2(4x-3)\cancel{(4x+3)}.2.\cancel{(x^2+1)}}\left(\frac{4x(x-1)+x}{\cancel{x-1}}\right)+2(x+2)-\frac{5}{x}$$

$$=\frac{(x+1)\cancel{x}\cancel{(4x-3)}}{2x^{\cancel{2}}\cancel{(4x-3)}}+2(x+2)-\frac{5}{x}=\frac{x+1}{2x}++2(x+2)-\frac{5}{x}$$

$$=\frac{1}{2x}\left(x+1+4x^2+8x-10\right)=\frac{1}{2x}\left(4x^2+9x-9\right)$$

Donc : $P(x)=0\rightarrow 4x^2+9x-9=0\rightarrow x=\dfrac{-9\pm\sqrt{81+144}}{8}\rightarrow\begin{cases}x=-3\\ x=\frac{3}{4} & \text{A rejeter}\end{cases}$

Conclusion : $\boxed{x=-3}$

Le 22 janvier 2007.

EXALG239 – Bruxelles, juillet 2006.

Déterminer toutes les valeurs du paramètre m pour lesquelles la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2m^2 - 1 & 1 - m^2 & -1 \\ 1 - 2m^2 & m^2 & m^2 \\ -1 & m^2 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.
Calculer l'inverse de cette matrice dans le cas où m = 2

Pour que la matrice soit inversible, il faut que son déterminant soit différent de zéro.
Calculons ce déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2m^2 - 1 & 1 - 2m^2 & -1 \\ 1 - 2m^2 & m^2 & m^2 \\ -1 & m^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2m^2 - 1 & 1 - 2m^2 & -1 \\ 2\left(1 - m^2\right) & 0 & m^2 - 1 \\ -1 & m^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(m^2 - 1\right) \begin{vmatrix} 2m^2 - 1 & 1 - 2m^2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & m^2 & 1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-1) \begin{vmatrix} 2m^2 - 3 & 1 - 2m^2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & m^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(m+1)(m-1) \begin{vmatrix} 2m^2 - 3 & 1 - 2m^2 \\ 1 & m^2 \end{vmatrix} = -(m+1)(m-1)\left(2m^4 - m^2 - 1\right)$$

$$= -(m+1)^2 (m-1)^2 \left(2m^2 + 1\right)$$

Donc la matrice est inversible si $\boxed{x \neq \pm 1}$

b) Première méthode

Soit donc la matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & -7 & -1 \\ -7 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Utilisons la méthode de Gauss

Ligne	Opération						
L_1		7	-7	-7	1	0	0
L_2		-7	4	4	0	1	0
L_3		-1	4	1	0	0	1
L_4	$L_1/7$	1	-1	$-1/7$	$1/7$	0	0
L_5	$L_2/7$	-1	$4/7$	$4/7$	0	$1/7$	0
L_6		-1	4	1	0	0	1
L_7		1	-1	$-1/7$	$1/7$	0	0
L_8	L_5+L_4	0	$-3/7$	$3/7$	$1/7$	$1/7$	0
L_9	L_6+L_4	0	3	$6/7$	$1/7$	0	1
L_{10}		1	-1	$-1/7$	$1/7$	0	0
L_{11}	$-3.L_8/7$	0	1	-1	$-1/3$	$-1/3$	0
L_{12}	$\frac{7}{27}(L_9+7.L_8)$	0	0	1	$8/27$	$7/27$	$7/27$
L_{13}	$L_{10}+L_{11}$	1	0	$-8/7$	$-4/21$	$-1/3$	0
L_{14}	$L_{11}+L_{12}$	0	1	0	$-1/27$	$-2/27$	$7/27$
L_{15}		0	0	1	$8/27$	$7/27$	$7/27$
L_{16}	$L_{13}+\frac{8}{7}L_{15}$	1	0	0	$4/27$	$-1/27$	$8/27$
L_{17}		0	1	0	$-1/27$	$-2/27$	$7/27$
L_{18}		0	0	1	$8/27$	$7/27$	$7/27$

Et finalement : $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 4/27 & -1/27 & 8/27 \\ -1/27 & -2/27 & 7/27 \\ 8/27 & 7/27 & 7/27 \end{pmatrix}}$

On vérifie facilement que $M^{-1}.M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Deuxième méthode

Si M est la matrice donnée, alors $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}\mathfrak{M}^T$

Avec $\mathfrak{M}^T$ la matrice tranposée des cofacteurs de M :

Chaque élément de $\mathfrak{M}$ est donné par $\mathfrak{M}_{\mathrm{ij}} = (-1)^{i+k}\det U_{ik}$

où $\det U_{ik}$ est le mineur c'est-à-dire le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la range i et la colonne k.

Donc : $M = \begin{pmatrix} 7 & -7 & -1 \\ -7 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} -12 & +3 & -24 \\ +3 & +6 & -21 \\ -24 & -21 & -21 \end{pmatrix}$

Ici $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^T$ car la matrice est symétrique

D'autre part : $\det M = -(m+1)(m-1)(2m^4 - m^2 - 1) = -81$

$$\rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det M}\mathfrak{M}^T = \begin{pmatrix} -12/81 & +3/81 & -24/81 \\ +3/81 & +6/81 & -21/81 \\ -24/81 & -21/81 & -21/81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/27 & -1/27 & 8/27 \\ -1/27 & -2/27 & 7/27 \\ 8/27 & 7/27 & 7/27 \end{pmatrix}$$

Le 23 janvier 2007.