Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 26

EXALG260 – EXALG269

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG260 – Louvain, juillet 2007, série 1.

Résoudre dans les réels l'équation suivante :

$$2\log_4(x+1)+\log_4(x+3)=\log_4(6x+2)+\frac{1}{2}$$

Solution proposée par Steve Tumson

D'abord, les conditions d'existence : $\begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \\ 6x+2>0 \end{cases} \Rightarrow x>-\dfrac{1}{3}$

Réécrivons ensuite l'équation sous forme de log en base 4 :

$\log_4\left((x+1)^2\right)+\log_4(x+3)=\log_4(6x+2)+\log_4\left(4^{1/2}\right)$

Par les propriétés des logarithmes, on écrit :

$\log_4\left[(x+1)^2(x+3)\right]=\log_4\left[2(6x+2)\right]$

La fonction logarithme étant bijective, le problème se ramène à résoudre :

$(x+1)^2(x+3)=2(6x+2) \Leftrightarrow x^3+5x^2-5x-1=0 \xrightarrow{HORNER} (x-1)(x^2+6x+1)=0$

Les solutions sont : $\begin{cases} x=1 \\ x=-3-2\sqrt{2}\approx -5{,}83 \xrightarrow{CE} \textit{rejet} \\ x=-3+2\sqrt{2}\approx -0{,}17 \end{cases}$

Finalement on a : $\boxed{S=\left\{1,-3+2\sqrt{2}\right\}}$

---

6 juillet 07

EXALG261 – Louvain, juillet 2007, série 1.

Stivy, Nico et Franky décident d'aller fêter le début des vacances avec quelques amis. Ils emmènent chacun avec eux une bouteille d'une litre de William Lawson.

Stivy et Nico arrivent les premiers et partagent la première bouteille avec ceux qui sont déjà présent à 20h. Franky arrive un peu plus tard accompagné de quelques autres personnes et ils partagent tous ensemble la seconde bouteille sans Nico qui est allé chercher un BigMac au MacDonald. Lorsque Nico revient et qu'ils partagent la troisième bouteille, Stivy est déjà parti avec ceux qui étaient les plus fatigués. Sachant qu'au total, Stivy a bu 2/15 de litre, Franky 7/60 de litre et Nico 3/20 de litre, déduisez combien de personnes étaient présentes lors du partage de la première, la seconde et enfin la troisième bouteille.

Note : tous les partages se font de manière équitable entre les personnes présentes et à chaque fois.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Mise en équations

Appelons :

ℓ le nombre de personnes présentes lors du partage de la 1e bouteille, y compris Stivy et Nico ;

m le nombre de personnes présentes lors du partage de la 2e bouteille, y compris Stivy et Franky ;

n le nombre de personnes présentes lors du partage de la 3e bouteille, y compris Nico et Franky.

Alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{\ell}+\frac{1}{m} & = & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{\ell}+\frac{1}{n} & = & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{m}+\frac{1}{n} & = & \frac{7}{60} \end{cases}$$

Ce système représente la mise en équations du problème.

Résolution

Notons $x = \frac{1}{\ell}$, $y = \frac{1}{m}$ et $z = \frac{1}{n}$; le système précédent s'écrit et se résout alors comme suit :

$$\begin{cases} x+y & = & \frac{2}{15} \\ x \quad +z & = & \frac{3}{20} \\ \quad y+z & = & \frac{7}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y & = & \frac{2}{15} \\ x-y & = & \frac{1}{30} \\ z & = & \frac{7}{60}-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & \frac{5}{60}=\frac{1}{12} \\ y & = & \frac{3}{60}=\frac{1}{20} \\ z & = & \frac{4}{60}=\frac{1}{15} \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \ell = \frac{1}{x} = 12 \\ m = \frac{1}{y} = 20 \\ n = \frac{1}{z} = 15 \end{cases}$$

Résonse

- Le nombre de personnes présentes lors du partage de la 1e bouteille, y compris Stivy et Nico, est 12 ;
- le nombre de personnes présentes lors du partage de la 2e bouteille, y compris Stivy et Franky, est 20 ;
- le nombre de personnes présentes lors du partage de la 3e bouteille, y compris Nico et Franky, est 15.

---

6 juillet 07. Modifié le 27 janvier 2012 (Jan Frans Broeckx)

EXALG262 – Louvain, juillet 2007, série 1.

Résoudre dans les complexes l'équation suivante :

$$z^2+3z(1-i)+4-3i=0$$

Exprimer les racines sous forme $a+bi$

Solution proposée par Steve Tumson

Calculons le discriminant : $\rho = 9(1-i)^2-4(4-3i)=-6i-16$

Les racines sont donc : $x_{1,2}=\dfrac{3(i-1)\pm\sqrt{-6i-16}}{2}$

Il reste à déterminer la racine carrée sous forme $a+bi$:

$$\begin{cases} a^2-b^2=-16 \\ a^2+b^2=\sqrt{6^2+16^2}=\sqrt{292}=2\sqrt{73} \\ 2ab=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a=\pm\sqrt{-8+\sqrt{73}} \\ b=\pm\dfrac{-3}{\sqrt{-8+\sqrt{73}}} \end{array}$$

On a donc :

$$\sqrt{-6i-16}=\pm\sqrt{-8+\sqrt{73}}\mp\frac{3i}{\sqrt{-8+\sqrt{73}}}$$

On peut donc réécrire les solutions :

$$x_{1,2}=\frac{3}{2}(i-1)\pm\frac{1}{2}\sqrt{-8+\sqrt{73}}\mp\frac{3i}{2\sqrt{-8+\sqrt{73}}}$$

Ou encore :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1=\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{-8+\sqrt{73}}-\dfrac{3}{2}\right)+i\left(\dfrac{-3}{2\sqrt{-8+\sqrt{73}}}+\dfrac{3}{2}\right)\approx -1,131-i0,533 \\ x_2=\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{-8+\sqrt{73}}-\dfrac{3}{2}\right)+i\left(\dfrac{3}{2\sqrt{-8+\sqrt{73}}}+\dfrac{3}{2}\right)\approx -1,869+i3,533 \end{array}}$$

---

16 juillet 07

EXALG263 – Louvain, juillet 2007, série 2.

Résoudre dans les complexes l'équation suivante :

$$z^6+z^4+z^2+1=0$$

Solution proposée par Steve Tumson

Posons $Z=z^2$

L'équation devient :

$$Z^3+Z^2+Z+1=0$$

On voit clairement que le polynôme est factorisable par $Z+1$.

Par Horner, on écrit :

$$(Z+1)\left(Z^2+1\right)=(Z+1)\left(Z^2-i^2\right)=(Z+1)(Z-i)(Z+i)=0$$

Les solutions sont donc :

$$Z=-1\Leftrightarrow z^2=-1$$
$$Z=i\Leftrightarrow z^2=i$$
$$Z=-i\Leftrightarrow z^2=-i$$

On résout :

$$z^2=-1\Leftrightarrow z^2=i^2\Leftrightarrow z=\pm i$$
$$z^2=i\Leftrightarrow z=\sqrt{i}$$
$$z^2=-i\Leftrightarrow z=\sqrt{-i}$$

Mettons les deux dernières solutions sous forme $a+bi$:

$$\sqrt{i}=a+bi\ \text{ avec }\begin{cases}a^2-b^2=0\\a^2+b^2=1\\2ab=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\b=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\sqrt{-i}=a+bi\ \text{ avec }\begin{cases}a^2-b^2=0\\a^2+b^2=1\\2ab=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\b=\mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Les solutions sont donc finalement :

$$\boxed{z_1=-i,z_2=i,z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},z_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},z_5=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},z_6=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

---

16 juillet 07

EXALG264 – Bruxelles, juillet 1999.

Si $a+b+c=2p$, calculer la valeur de l'expression
$\mathcal{E}=p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2$.

Solution proposée par Benoit Baudelet

Il suffit de remplacer p par $\frac{1}{2}(a+b+c)$ dans l'expression pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2 \\
&= \left[\tfrac{1}{2}(a+b+c)\right]^2+\left[\tfrac{1}{2}(-a+b+c)\right]^2+\left[\tfrac{1}{2}(a-b+c)\right]^2+\left[\tfrac{1}{2}(a+b-c)\right]^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\big(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac+a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ac \\
&\quad +a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac+a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac\big) \\
&= a^2+b^2+c^2
\end{aligned}$$

---

16 juillet 07. Relu par Steve Tumson

EXALG265 – Bruxelles, juillet 1999.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4-x}=1.$$

Solution proposée par Benoit Baudelet

On élève les deux membres au cube.

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4-x}\right)^3=1 \\
\Leftrightarrow\quad & x+3+3\sqrt[3]{(x+3)^2(4-x)}+3\sqrt[3]{(x+3)(4-x)^2}+4-x=1 \\
\Leftrightarrow\quad & 3\left(\sqrt[3]{(x+3)^2(4-x)}+\sqrt[3]{(x+3)(4-x)^2}\right)=-6 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt[3]{(x+3)^2(4-x)}+\sqrt[3]{(x+3)(4-x)^2}=-2 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt[3]{(x+3)(4-x)}\left(\underbrace{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4-x}}_{=1 \text{ par hypothèse}}\right)=-2 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt[3]{(x+3)(4-x)}=-2 \\
\Leftrightarrow\quad & (x+3)(4-x)=(-2)^3=-8 \\
\Leftrightarrow\quad & -x^2+x+12=-8 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2-x-20=0 \\
\Leftrightarrow\quad & x=-4 \quad \text{ou} \quad x=5
\end{aligned}$$

---

16 juillet 07. Relu par Steve Tumson

EXALG266 – Bruxelles, juillet 1999.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant par rapport aux paramètres a et b l'équation

$$\frac{x-a}{2}=\frac{(x-b)^2}{2x-a}.$$

.

Solution proposée par Benoit Baudelet

<u>Condition d'existence</u> : $x \neq \frac{a}{2}$.

D'où :

$$(2x-a)(x-a)=2(x-b)^2$$
$$2x^2-ax-2ax+a^2-2x^2+4bx-2b^2=0$$
$$(4b-3a)x=2b^2-a^2$$

1) Si $4b-3a\neq 0$, alors $\boxed{x=\frac{2b^2-a^2}{4b-3a}}$.

2) Si $4b-3a=0 \Leftrightarrow b=\frac{3}{4}a$, alors $0x=2b^2-a^2=2\left(\frac{3}{4}a\right)^2-a^2=\frac{a^2}{8}$

a) si $a=0$ (et donc $b=0$), alors $\boxed{0x=0}$, <u>équation indéterminée</u> ;

b) si $a\neq 0$ (et donc $b\neq 0$), alors $\boxed{0x\neq 0}$, <u>équation impossible</u>.

---

16 juillet 07. Relu par Steve Tumson

EXALG267 – ERM, juillet 2003.

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$1=6x^{-2}+9x^{-4}$$

.

Solution proposée par Benoit Baudelet

Puisque $x=0$ n'est pas une solution de l'équation ci-dessous, multiplions les deux membres par x^4 et posons $x^2=X$. On obtient alors successivement

$$x^4=6x^2+9 \Leftrightarrow X^2-6X-9=0$$

dont les solutions sont .

$$X_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4.1.(-9)}}{2}=\frac{6\pm6\sqrt{2}}{2}=3\pm3\sqrt{2}$$

- $X=3-3\sqrt{2}=x^2$ (à rejeter car $3-3\sqrt{2}<0$).
- $X=3+3\sqrt{2}=x^2$, donc $x=\pm\sqrt{3+3\sqrt{2}}$.

Finalement : $\boxed{S=\left\{-\sqrt{3+3\sqrt{2}}\ ;\ \sqrt{3+3\sqrt{2}}\right\}.}$

---

16 juillet 07. Relu par Steve Tumson

EXALG268 – ERM, juillet 2003.

Sachant que $x + y = 9$, calculer le maximum de $P = xy^2$.

.

Solution proposée par Benoit Baudelet

On peut réécrire l'expression de P en fonction de l'unique variable y en tenant compte de la contrainte $x + y = 9$: $P(y) = (9 - y)y^2 = 9y^2 - y^3$, qui est une fonction de l'unique variable y, dont on doit recherche le maximum.

$P'(y) = (9y^2 - y^3)' = 18y - 3y^2$ et .

$P'(y) = 0 \Leftrightarrow 18y - 3y^2 = 0 \Leftrightarrow 3y(6 - y) \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 6$

y		0		6	
$P'(y) = 9y - 3y^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$P(y)$	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$	*Max*	$\searrow$

Le maximum de la fonction $P(y)$ est atteint lorsque $y = 6$.

En cette abscisse, la fonction vaut $P(6) = 9 \times 6^2 - 6^3 = 324 - 216 = 108$.

---

16 juillet 07. Relu par Steve Tumson

EXALG269 – ERM, juillet 2003.

Cherche le nombre positif, plus grand que son inverse, tel que la différence entre ce nombre et son inverse soit égale à $\frac{16}{15}$.

Solution proposée par Benoit Baudelet

Si x désigne le nombre positif recherché (avec $x > \frac{1}{x}$), on a

$$x - \frac{1}{x} = \frac{16}{15}$$

ou encore $15x^2 - 16x - 15 = 0$ dont les solutions sont $\boxed{x = -\frac{3}{5}}$ et $\boxed{x = \frac{5}{3}}$.

Les deux solutions conviennent.

---

16 juillet 07. Relu par Steve Tumson