Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 28

EXALG280 – EXALG289

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG280 – FPMS – Mons, Juillet 2004 (ALG01.10).

Soit $p(x)$ un polynôme de degré 5 à coefficients réels.

1. Déterminer ses coefficients, en sachant que :
   - $p(x)$ s'annule, ainsi que sa dérivée première, en $x = 3$
   - $p(x)$ possède une racine en $x = i$
   - $p(x)$ possède un minium en $x = 0$, de valeur 27.

   Enfin lister toutes les racines de ce polynôme

   Indice : considérez $p(x)$ sous forme factorisée
2. Représenter l'allure de ce polynôme sans utiliser la dérivée seconde. Si nécessaire, vous pouvez calculer la valeur du polynôme en des valeurs entières de x

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution Reprenons les indices un par un:

- $p(3) = 0$ et $p'(3) = 0$: le polynôme est divisible par $(x-3)^2$
- $p(i) = 0$ donc $p(-i) = 0$ car les coefficients de $p(x)$ sont réels (si une racine est complexe, le complexe conjugué est racine également)
- $p'(0) = 0$ et $p(0) = 27$

  Le polynôme étudié peut s'écrire:

$$p(x) = a(x-3)(x-3)(x-i)(x+i)(x+b)$$

$p(0) = 27$, donc $ab = 3$;

$$p(x) = (x-3)^2(x^2+1)(ax+3);$$

En effectuant:

$$p(x) = ax^5 + (3-6a)x^4 + (10a-18)x^3 + (30-6a)x^2 + (9a-18)x + 27.$$

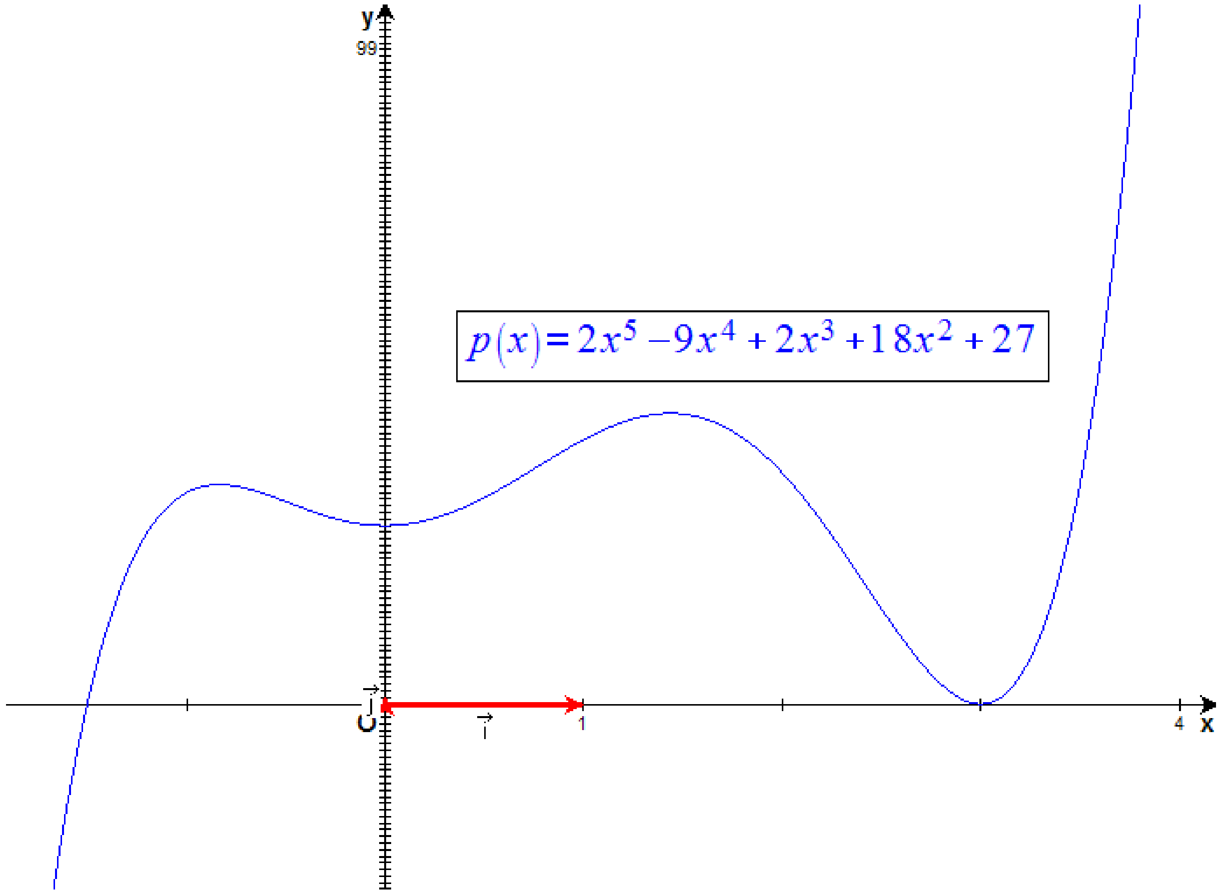
La dérivée première s'annule en zéro:

$$9a - 18 = 0$$

Donc $a = 2$; on a :

$$p(x) = 2x^5 - 9x^4 + 2x^3 + 18x^2 + 27.$$

Représentation graphique: voir figure 1 (évaluation de $p(1) = 40$ et $p(-1) = 32$).



28 juillet 07.

EXALG281 – FPMS – Mons, Juillet 2004 (ALG04.08).

Résoudre et discuter l'inéquation suivante :

$$x^2-7x+18+\sqrt{x^2-7x+18}\leq 42$$

Avec $x \in \mathbb{R}$

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution Il faut vérifier que $x^2-7x+18\geq 0$. Si on calcule le discriminant Δ ($\Delta = -23<0$), on constate que $x^2-7x+18>0$ est toujours vrai.
Posons $t^2=x^2-7x+18$ avec $t>0$. On peut écrire l'inéquation sous la forme: $t^2+t-42\leq 0$, c'est-à-dire:

$$(t-6)(t+7)\leq 0.$$

Il faut donc que $-7\leq t\leq 6$. Or, on a aussi $t>0$, donc $t \in]0,6]$.
Revenons à la variable x; on a $x^2-7x+18=t^2$ avec $t\in]0,6]$. Il en résulte une condition sur x qui est:

$$0<x^2-7x+18\leq 36.$$

La première inéquation est vérifiée pour tout x comme on l'a vu au début. La seconde donne $x^2-7x-18\leq 0$. Cette condition est satisfaite lorsque x est situé entre les racines du trinôme, soit $x\in[-2,9]$.

---

28 juillet 07.

EXALG282 – FPMS – Mons, Juillet 2005 (ALG05.05).

Résoudre :

$$\ln(x+2)+\ln(4x-1)<\ln(x+6)$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution

Conditions d'existence : le logarithme est défini sur l'intervalle $]0,\ +\infty[$

$$\begin{cases} x+2>0 \\ 4x-1>0 \\ x+6>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>\dfrac{1}{4} \\ x>-6 \end{cases} \Rightarrow x>\frac{1}{4}$$

Le domaine de validité correspond donc à l'intervalle $]\frac{1}{4},\ +\infty[$

Résolution de l'inéquation

$$\begin{gathered} \ln(x+2)(4x-1)<\ln(x+6) \\ (x+2)(4x-1)<x+6 \\ 4x^2+6x-8<0 \end{gathered}$$

Les racines du trinôme valent :

$$x_1=\frac{-3-\sqrt{41}}{4}\approx-2.35$$
$$x_2=\frac{-3+\sqrt{41}}{4}\approx 0.85$$

Le trinôme est négatif pour les valeurs de x comprises dans l'intervalle $]-2.35,\quad 0.85[$. En tenant compte de la condition d'existence, les valeurs de x vérifiant l'inéquation appartiennent à l'intervalle $]0.25,\quad 0.85[$

---

28 juillet 07.

EXALG283 – FPMS – Mons, Juillet 2004 (ALG04.07).

Trouver les valeurs de *x* pour que l'inégalité suivante soit vraie :

$$\sqrt{2-x}+\sqrt{3+x}\geq 1$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution Les radicaux des racines doivent être positifs:

$$\begin{aligned} x &\leq 2 \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

Ces deux conditions sont compatibles et donnent:

$$-3 \leq x \leq 2$$

Il reste à trouver dans cet intervalle les valeurs de x qui répondent à l'inégalité. En élevant au carré, on trouve:

$$\begin{aligned} 2-x+2\sqrt{2-x}\sqrt{3+x}+3+x &\geq 1 \\ \sqrt{2-x}\sqrt{3+x} &\geq -2 \end{aligned}$$

Cette dernière relation étant toujours vraie pour $x \in [-3, 2]$, on en déduit que l'inégalité est aussi vraie pour $x \in [-3, 2]$.

---

28 juillet 07.

EXALG284 – FPMS – Mons, Juillet 2005 (ALG05.09).

Soient *a, b, c, d* les quatre racines du polynôme

$$x^4 - 2x^3 + mx^2 + 32x + 240$$

Le coefficient de x^2 est un paramètre *m* ; déterminez *m* sachant que $a + b = c + d$

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution Connaissant les quatre racines, le polynome s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned}(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = &+ x^4 \\ &- x^3(a+b+c+d) \\ &+ x^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ &- x(abc+abd+acd+bcd) \\ &+ abcd\end{aligned} \tag{1}$$

En identifiant les coefficient, on obtient le système d'équations:

$$a+b+c+d = 2 \tag{2}$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd = m \tag{3}$$

$$abc+abd+acd+bcd = -32 \tag{4}$$

$$abcd = 240 \tag{5}$$

La relation (2) peut s'écrire:

$$a+b = c+d = 1 \tag{6}$$

Les relations (4) et (6) donnent:

$$\begin{aligned}abc+abd+acd+bcd &= -32 \\ ab(c+d)+cd(a+b) &= -32 \\ ab+cd &= -32\end{aligned} \tag{7}$$

De même les relations (3) et (6) donnent:

$$\begin{aligned}ab+ac+ad+bc+bd+cd &= m \\ ab+a(c+d)+b(c+d)+cd &= m \\ ab+(a+b)+cd &= m \\ ab+cd+1 &= m\end{aligned} \tag{8}$$

Finalement, en combinant cette dernière relation avec (7), on trouve le résultat:

$$m = -31 \tag{9}$$

---

28 juillet 07.

EXALG285 – FPMS – Mons, Juillet 2005(ALG05.19).

Trouvez toutes les valeurs de *x* qui satisfont l'équation

$$2\left(\log_{10} x\right)^3 + \log_{10} x^2 = \left(\log_{10} x^{\sqrt{5}}\right)^2$$

Posons : $t = \log_{10} x$

L'équation devient : $2t^3 + 2t = 5t^2 \rightarrow t\left(2t^2 - 5t + 2\right) = 0$

<u>1er cas</u> : $t = 0 \rightarrow \log_{10} x = 0 \rightarrow \boxed{x = 1}$

<u>2ème cas</u> : $2t^2 - 5t + 2 = 0$

$$\rightarrow t_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \rightarrow \begin{cases} t = 2 \rightarrow \log_{10} x = 2 \rightarrow \boxed{x = 100} \\ t = \dfrac{1}{2} \rightarrow \log_{10} x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = \sqrt{10}} \end{cases}$$

---

28 juillet 07.

EXALG286 – FPMS – Mons, Juillet 2005 (ALG05.13)

Résolvez et discuter le système linéaire suivant en fonction de la valeur du paramètre réel a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

Les déterminants sont :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = (a+1)(a-1)^2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+1)(a-1)^2$$

<u>1^{er} cas : $a = 1$</u>

Le système devient : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \rightarrow z = 1 - x - y \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Système doublement indéterminé : $S\{x; y; 1 - x - y\}$

<u>$2^{ème}$ cas : $a = -2$</u>

Le système devient : $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \rightarrow 0 = -3 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$

Système impossible

<u>Dans les autres cas</u>

$$x = -\frac{1}{a+2} \quad y = z = \frac{a+1}{a+2}$$

29juillet 07.

EXALG287 – FSA – Louvain, septembre 2007.

Résoudre dans les réels l'équation suivante :

$$\log\left(\sqrt{5x+8}\right)+\frac{1}{2}\log(2x+3)=\log 15$$

Solution proposée par Steve Tumson

Conditions d'existence:

$$\begin{array}{lll} 5x+8\geq 0 & \text{et} & 2x+3\geq 0 \\ x\geq -\dfrac{8}{5} & \text{et} & x\geq -\dfrac{3}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x\geq -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\log\left(\sqrt{5x+8}\right)+\frac{1}{2}\log(2x+3)=\log 15\\
&\Leftrightarrow \log\left(\sqrt{5x+8}\right)+\log\left(\sqrt{2x+3}\right)=\log 15\\
&\Leftrightarrow \log\left(\sqrt{(5x+8)(2x+3)}\right)=\log 15\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(5x+8)(2x+3)}=15\\
&\Leftrightarrow (5x+8)(2x+3)=225\\
&\Leftrightarrow 10x^2+31x-201=0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-31\pm\sqrt{9001}}{20}$$

Vu les conditions d'existence: $\boxed{S=\left\{\dfrac{-31+\sqrt{9001}}{20}\approx 3,2\right\}}$

---

15 sept. 07

EXALG288 – FSA – Louvain, septembre 2007.

Résoudre dans les réels, l'inéquation suivante :

$$\frac{x-2}{x+2} \geq -2-\sqrt{-x}$$

Solution proposée par Steve Tumson

$\dfrac{-3x-2}{x+2} \leq \sqrt{-x} \qquad \to \underline{CE}: \; x \leq 0$

		-2		$-2/3$	
$-3x-2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	$/$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$/$	$+$	0	$-$

$\Rightarrow \sqrt{-x}$ étant toujours positif, l'inéquation est vérifiée pour $\forall x \in \left]\leftarrow,-2\right[\cup \left[-\dfrac{2}{3},0\right]$

Dans l'intervalle $\left]-2,-\dfrac{2}{3}\right[$, les deux membres sont strictement positifs, on peut donc les élever au carré :

$$\left(\frac{-3x-2}{x+2}\right)^2 \leq -x \;\Leftrightarrow\; 9x^2+4+12x \leq -x\left(x^2+4+4x\right) \;\Leftrightarrow\; x^3+13x^2+16x+4 \leq 0$$

Ce troisième degré est factorisable via Horner :

	1	13	16	4
		-1	-12	-4
-1				
	1	12	4	0

$\Rightarrow x^3+13x^2+16x+4 = (x+1)\left(x^2+12x+4\right)$

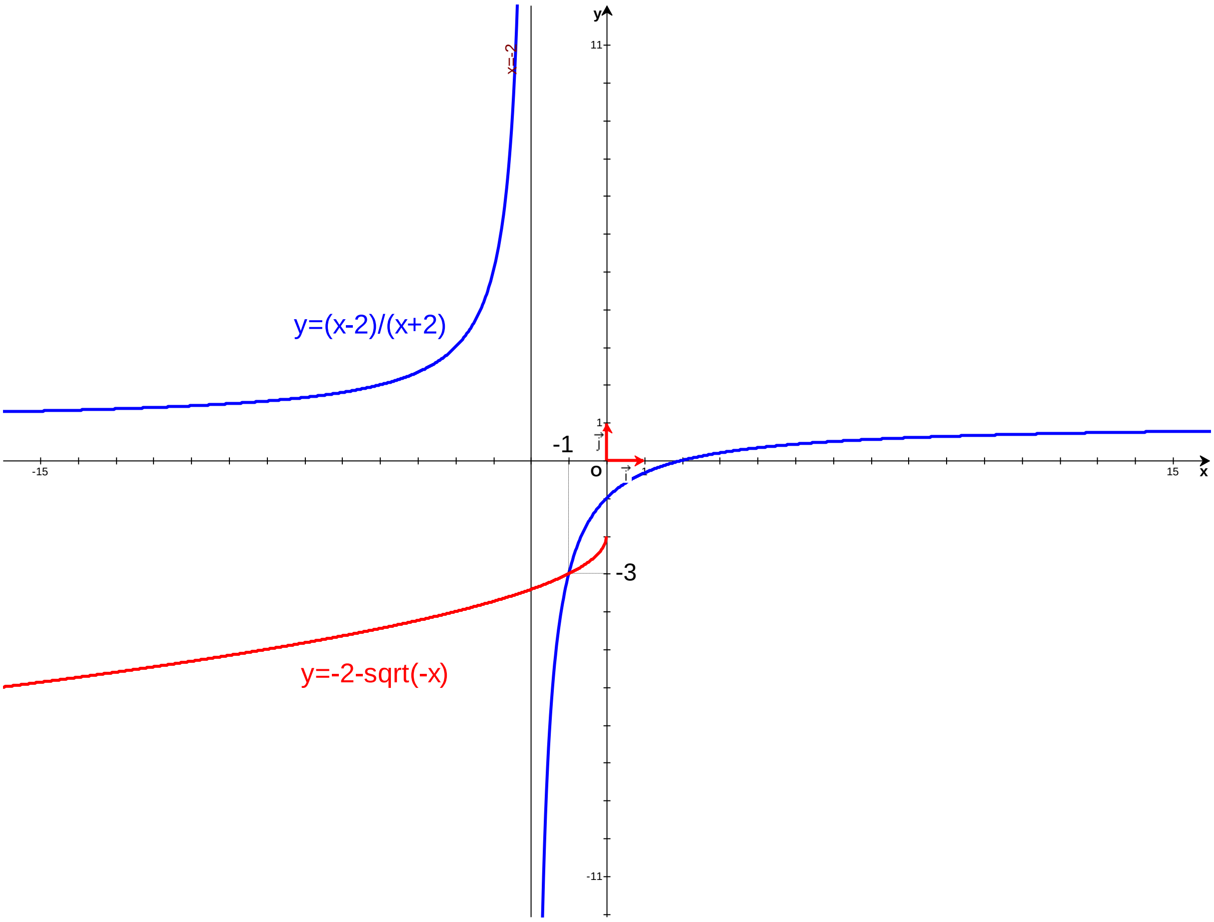
Le second degré admet comme racine : $x_{1,2} = -6 \pm 4\sqrt{2} \approx -0,34$ et $-11,65$

		$-11,65$		-2		-1		$-2/3$		$-0,34$	
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2+12x+4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$/$	$/$	$/$	$/$	$+$	0	$-$	$-$	$/$	$/$	$/$

Dans l'intervalle dans lequel nous opérons, l'inéquation est vérifiée $\forall x \in \left]-1,-\dfrac{2}{3}\right]$

Finalement, la solution globale de l'inéquation est :

$$\boxed{x \in \left]\leftarrow,-2\right[\cup \left[-1,0\right]}$$



15 sept. 07

EXALG289 – FSA – Louvain, septembre 2007.

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel *m*, l'équation suivante :

$$2x^2-(m-1)x+m+1=0$$

possède deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 telles que $|x_2-x_1|=1$

Que valent ces racines ?

Solution proposée Steve Tumson

$2x^2-(m-1)x+m+1=0$

$\rho=(m-1)^2-8(m+1)=m^2-10m-7$

$$\rho>0 \Leftrightarrow m\in\left]\leftarrow;5-4\sqrt{2}\approx -0,657\right[\cup\left]5+4\sqrt{2}\approx 10,67;\rightarrow\right[$$

$$x_{1,2}=\frac{(m-1)\pm\sqrt{m^2-10m-7}}{4}\Rightarrow|x_2-x_1|=\frac{\sqrt{m^2-10m-7}}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow m^2-10m-11=0$$
$$\Leftrightarrow (m-11)(m+1)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{m=-1 \text{ ou } 11} \qquad \rightarrow \text{Ces deux valeurs donnent bien deux racines distinctes!}$$

<u>Cas où $m=-1$</u>

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{1+10-7}}{4}=\frac{-1\pm 1}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=0\end{cases}}$$

<u>Cas où $m=11$</u>

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{121-110-7}}{4}=\frac{5\pm 1}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=3\end{cases}}$$

---

15 sept. 07. Modifié le 1 novembre 2009 (Cédric Fanna)