

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

## ALG 29

**EXALG290 – EXALG299**

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

## EXALG290 – FSA – Louvain, septembre 2007.

Candice quitte Bruxelles pour Luxembourg en voiture. Au même moment, son copain Stivy quitte Luxembourg pour Bruxelles en Moto. La distance est de 210km. Ils roulent chacun à une vitesse constante le long de la même route. Ils se croisent à un moment où il reste deux heures de route à Candice alors que Stivy n'est plus qu'à 9/8 d'heure de Bruxelles.

Calculer leur vitesse.

---

### Solution proposée par Steve Tumson

Après leur croisement, le chemin qu'il reste parcourir est :

$$\begin{cases} \Delta e_{C2} = v_C t_{resteC} \\ \Delta e_{S2} = v_S t_{resteS} \end{cases} \text{ avec } t_{resteC} = 2 \quad \text{et} \quad t_{resteS} = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta e_{C2} = 2v_C \\ \Delta e_{S2} = \frac{9}{8}v_S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2v_C + \frac{9}{8}v_S = \Delta e_{C2} + \Delta e_{S2} = 210 \quad (1)$$

On sait aussi que au moment du croisement, le chemin qu'un parcouru Steve vaut le chemin qu'il reste à parcourir à Candice et vice versa :

$$\begin{cases} \Delta e_{C1} = \Delta e_{S2} \Leftrightarrow v_C t_{croisement} = \frac{9}{8}v_S \\ \Delta e_{S1} = \Delta e_{C2} \Leftrightarrow v_S t_{croisement} = 2v_C \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} t_{croisement} = \frac{9}{8} \frac{v_S}{v_C} \\ t_{croisement} = 2 \frac{v_C}{v_S} \end{cases} \Rightarrow v_C = \frac{3}{4}v_S \quad (2)$$

Il reste simplement de résoudre le système (1) et (2)

$$\begin{cases} 2v_C + \frac{9}{8}v_S = 210 \\ v_C = \frac{3}{4}v_S \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{v_S = 80 [km/h] \text{ et } v_C = 60 [km/h]}$$

---

15 sept. 07

## EXALG291 – FACS – ULB - Bruxelles, juillet 2007.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$2^{4x+2} + 3(4^x) - 2^{-1} = 0$$

---

$$2^{4x+3} + 3(4^x) - 2^{-1} = 0 \rightarrow 2^3 \cdot (2^{2x})^2 + 3 \cdot 2^{2x} - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 2^4 \cdot (2^{2x})^2 + 6 \cdot 2^{2x} - 1 = 0$$

C'est une équation du second degré en  $2^{2x}$

$$2^{2x} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 16}}{16} = \frac{-3 \pm 5}{16} \rightarrow \begin{cases} 2^{2x} = -\frac{1}{2} & \text{A rejeter} \\ 2^{2x} = \frac{1}{8} \rightarrow 2^{2x} = 2^{-3} \rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}} \end{cases}$$

---

05 Jan 08

## EXALG292 – FACS – ULB - Bruxelles, juillet 2007.

a) Déterminer les valeurs réelles des paramètres  $a, b, c$  pour que le polynôme

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax + c$$

soit divisible par  $1-x^2$

b) Pour les valeurs des paramètres trouvées ce-dessus :

1. Déterminer le quotient de la division du polynôme  $P$  par  $1-x$
2. Factoriser  $P$  au maximum dans  $\mathbb{R}$
3. Factoriser  $P$  au maximum dans  $\mathbb{C}$ , en déduire les racines complexes et les représenter dans le plan de Gauss.

---

a) Si  $P$  est divisible par  $1-x^2$ , il est divisible par  $(1-x)(1+x)$  et donc 1 et  $-1$  sont des racines

$$\rightarrow \begin{cases} P(1) = a + b + c + a + c = 0 \\ P(-1) = a - b + c - a + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = -a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = 2c \end{cases}$$

Donc :  $P(x) = -2cx^4 + 2cx^3 + cx^2 - 2cx + c$

b) 1. Par Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -2c & 2c & c & -2c & c \\ 1 & & -2c & 0 & c & -c \\ \hline & -2c & 0 & c & -c & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow P(x) = (1-x)(2cx^3 - cx + c)$$

2. On peut encore diviser par  $x+1$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2c & 0 & -c & c \\ -1 & & -2c & 2c & -c \\ \hline & 2c & -2c & c & 0 \end{array}$$

Finalemment :  $\boxed{P(x) = c(x+1)(1-x)(2x^2 - 2x + 1)}$  dans  $\mathbb{R}$

Le delta du troisième facteur est négatif.

3. Factorisons  $2x^2 - 2x + 1$  dans  $\mathbb{C} \rightarrow x = \frac{1 \pm i}{2}$

Et donc :  $\boxed{P(x) = 2c(x+1)(1-x)\left(x - \frac{1+i}{2}\right)\left(x - \frac{1-i}{2}\right)}$  dans  $\mathbb{C}$

## EXALG293 – FACS – ULB - Bruxelles, juillet 2007.

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ , en discutant en fonction du paramètre réel  $m$ , le système

$$\begin{cases} x - 2y - mz = 1 \\ 2x - (m+3)y + 3z = 2m \\ mx - (1+m)y + (1-2m^2)z = m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

---

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -m \\ 2 & -(m+3) & 3 \\ m & -(1+m) & 1-2m^2 \end{vmatrix} = (m-1)(m^2 - 2m - 4) = (m-1)(m-1-\sqrt{5})(m-1+\sqrt{5})$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -m \\ 2m & -(m+3) & 3 \\ m & -(1+m) & 1-2m^2 \end{vmatrix} = 5m^2(1-m)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -m \\ 2 & 2m & 3 \\ m & m & 1-2m^2 \end{vmatrix} = -2(m-1)^2(1+m)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -(m+3) & 2m \\ m & -(1+m) & m \end{vmatrix} = -2(m-1)^2$$

## Discussion

1)  $m=1$  Le système devient :

$$\begin{cases} x-2y-z=1 \\ 2x-4y+3z=2 \\ x-2y-z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y-z=1 \\ 2x-4y+3z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{Simple indétermination}$$

2)  $m=1+\sqrt{5}$  Le système devient :

$$\begin{cases} x-2y-(1+\sqrt{5})z=1 \\ 2x-(4+\sqrt{5})y+3z=2+2\sqrt{5} \\ (1+\sqrt{5})x-(2+\sqrt{5})y-(11+4\sqrt{5})z=1+\sqrt{5} \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} x-2y-(1+\sqrt{5})z=1 & (1) \\ x-\frac{4+\sqrt{5}}{2}y+\frac{3}{2}z=1+\sqrt{5} & (2) \\ x-\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}y-\frac{11+4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}z=1 & (3) \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} (3)-(1) \rightarrow \left(-\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}+2\right)y+\left(-\frac{11+4\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}+1+\sqrt{5}\right)z=0 \\ (2)-(1) \rightarrow \left(-\frac{4+\sqrt{5}}{2}+2\right)y+\left(\frac{3}{2}+1+\sqrt{5}\right)z=\sqrt{5} \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} (-2-\sqrt{5}+2+2\sqrt{5})y+(-11-4\sqrt{5}+6+2\sqrt{5})z=0 \\ (-4-\sqrt{5}+4)y+(5+2\sqrt{5})z=2\sqrt{5} \end{cases}$$
$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{5}y+(-5-2\sqrt{5})z=0 & (4) \\ -\sqrt{5}y+(5+2\sqrt{5})z=2\sqrt{5} & (5) \end{cases}$$
$$\rightarrow (4)+(5) \rightarrow 0=2\sqrt{5} \quad \text{Système impossible.}$$

3)  $m = 1 - \sqrt{5}$  Le système devient :

$$\begin{cases} x - 2y - (1 - \sqrt{5})z = 1 \\ 2x - (4 - \sqrt{5})y + 3z = 2 - 2\sqrt{5} \\ (1 - \sqrt{5})x - (2 - \sqrt{5})y + (-11 + 4\sqrt{5})z = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2y - (1 - \sqrt{5})z = 1 & (1) \\ x - \frac{4 - \sqrt{5}}{2}y + \frac{3}{2}z = 1 - \sqrt{5} & (2) \\ x - \frac{2 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}y + \frac{-11 + 4\sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}z = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (3) - (1) \rightarrow \left(-\frac{2 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} + 2\right)y + \left(\frac{-11 + 4\sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} + 1 - \sqrt{5}\right)z = 0 \\ (2) - (1) \rightarrow \left(-\frac{4 - \sqrt{5}}{2} + 2\right)y + \left(\frac{3}{2} + 1 - \sqrt{5}\right)z = -\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (-2 + \sqrt{5} + 2 - 2\sqrt{5})y + (-11 + 4\sqrt{5} + 6 - 2\sqrt{5})z = 0 \\ (-4 + \sqrt{5} + 4)y + (5 - 2\sqrt{5})z = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\sqrt{5}y + (-5 + 2\sqrt{5})z = 0 & (4) \\ \sqrt{5}y + (5 - 2\sqrt{5})z = -2\sqrt{5} & (5) \end{cases}$$

$\rightarrow (4) + (5) \rightarrow 0 = -2\sqrt{5}$  Système impossible.

4) Dans les autres cas

$$\begin{cases} x = -\frac{5m^2}{m^2 - 2m - 4} \\ y = -\frac{2(m-1)(m+1)}{m^2 - 2m - 4} \\ z = -\frac{2(m-1)}{m^2 - 2m - 4} \end{cases}$$

## EXALG294 – FACS – ULB - Bruxelles, juillet 2007.

Déterminer toutes les valeurs réelles du paramètre  $m$  pour lesquelles la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2m^2 + 4 & m & 1 + m^2 \\ 3m & m^2 & m \\ 2m^2 + 1 & m + 1 & m^2 \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

Calculer l'inverse de cette matrice dans le cas où  $m = -\frac{1}{2}$

---

### Conditions d'inversion

Pour que la matrice  $A$  soit inversible, il faut que son déterminant soit différent de zéro.

$$\begin{aligned} \text{Dé}t(A) &= \begin{vmatrix} 2m^2 + 4 & m & 1 + m^2 \\ 3m & m^2 & 3 \\ 2m^2 + 1 & m + 1 & m^2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{L1=L1-L3} \\ = m \end{array} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & m & 1 \\ 2m^2 + 1 & m + 1 & m^2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{L2=L2-L1} \\ = m \end{array} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & m + 1 & 0 \\ 2m^2 + 1 & m + 1 & m^2 \end{vmatrix} \\ &= m \cdot (m + 1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2m^2 + 1 & m^2 \end{vmatrix} = m(m + 1)(3m^2 - 2m^2 - 1) = m(m + 1)^2(m - 1) \end{aligned}$$

Il faut donc :  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$



### Calcul de l'inverse - Méthode de Gauss

Le tableau suivant donne le détail du calcul.

Les deux dernières colonnes sont des colonnes de contrôle.

L'avant-dernière représente la somme des lignes. La dernière représente ce que doit être cette somme en faisant les opérations mentionnées à la première colonne.

Ces contrôles ne sont pas indispensables mais très utiles et donc recommandés

Opération	Ligne	A			A <sup>-1</sup>			$\sum L_i$	$\sum \text{Ctrl}$
	L1	9/2	-1/2	5/4	1	0	0	25/4	
	L2	-3/2	1/4	-1/2	0	1	0	-3/4	
	L3	3/2	1/2	1/4	0	0	1	13/4	
L1×2/9	L4	1	-1/9	5/18	2/9	0	0	25/18	25/18
L2+L1×1/3	L5	0	1/12	-1/12	1/3	1	0	4/3	4/3
L3-L1×1/3	L6	0	2/3	-1/6	-1/3	0	1	7/6	7/6
L4	L7	1	-1/9	5/18	2/9	0	0	25/18	25/18
L5×12	L8	0	1	-1	4	12	0	16	16
L6-L5×8	L9	0	0	1/2	-3	-8	1	-19/2	-19/2
L7+L8×1/9	L10	1	0	1/6	2/3	4/3	0	19/6	19/6
L8+L9×2	L11	0	1	0	-2	-4	2	-3	-3
L9×2	L12	0	0	1	-6	-16	2	-19	-19
L10-L12×1/6	L13	1	0	0	5/3	4	-1/3	19/3	19/3
L11	L14	0	1	0	-2	-4	2	-3	-3
L12	L15	0	0	1	-6	-16	2	-19	-19

Conclusion :  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & 4 & -1/3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -6 & -16 & 2 \end{pmatrix}$

---

05 Jan 08

# EXALG295 – FACS – ULB - Bruxelles, septembre 2007.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  le système d'inéquations.

$$\begin{cases} \frac{3x+5}{7-3x} < 4 \\ \frac{12x^2+13x-14}{2-x} \geq 0 \end{cases}$$

On traite d'abord chaque inéquation séparément.

$$1) \frac{3x+5}{7-3x} < 4 \rightarrow \frac{3x+5}{7-3x} - 4 < 0 \rightarrow \frac{3x+5-28+12x}{7-3x} < 0 \rightarrow \frac{15x-23}{7-3x} < 0$$

Tableau de signe :

		23/15	7/3		
$15x-23$	-	0	+	+	+
$7-3x$	+	+	+	0	-
(1)	-	0	+	/	-

$$\rightarrow \text{Sol (1)}: \left] -\infty, \frac{23}{15} \right[ \cup \left] \frac{7}{3}, +\infty \right[$$

$$2) \frac{12x^2+13x-14}{2-x} \geq 0 \rightarrow \frac{12\left(x+\frac{7}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{2-x} \geq 0$$

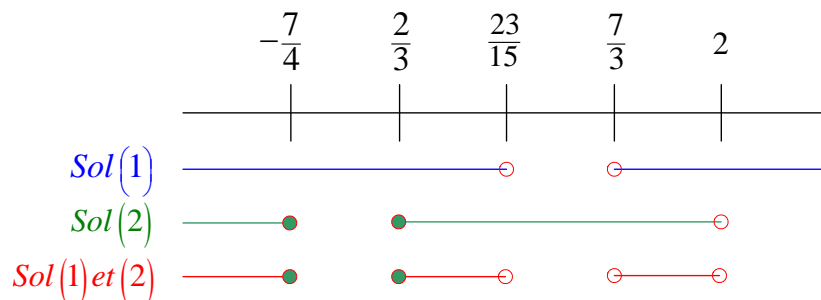
Tableau de signe :

		-7/4	2/3	2	
$12\left(x+\frac{7}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$	+	0	-	0	+
$2-x$	+	+	+	+	0
(2)	+	0	-	0	+

$$\text{Sol (2)}: \left] -\infty, -\frac{7}{4} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}, 2 \right[$$

En mettant ensemble les deux séries de solution, on trouve :

$$\text{Sol} : \left] -\infty, -\frac{7}{4} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}, \frac{23}{15} \right[ \cup \left] \frac{7}{3}, 2 \right[$$



## EXALG296 – FACS – ULB - Bruxelles, septembre 2007.

- a) Vérifier que  $3i$  est racine du polynôme  $P(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 18(x+1)$   
b) Enoncer une propriété qui vous permet de déduire de a) une autre racine de  $P$   
c) Factoriser  $P$  au maximum dans  $\mathbb{C}$ .
- 

a) 
$$P(3i) = (3i)^4 - 2(3i)^3 + 7(3i)^2 - 18(3i) - 18$$
$$= 81 + 54i - 63 - 54i - 18 = 0$$

$3i$  est donc bien une racine de  $P$

- b) Si un polynôme admet une racine complexe  $z$ , alors le conjugué  $\bar{z}$  est aussi une racine du polynôme. Autrement dit  $-3i$  est aussi une racine.

- c) On peut donc facilement factoriser par Horner :

	4	3	2	1	0
	1	-2	7	-18	-18
$3i$		$3i$	$-9 - 6i$	$18 - 6i$	18
	1	$-2 + 3i$	$-2 - 6i$	$-6i$	0
$-3i$		$-3i$	$+6i$	$+6i$	
	1	-2	-2	0	

Et donc :  $P(x) = (x - 3i)(x + 3i)(x^2 - 2x - 2)$

Il reste à factoriser le troisième facteur, ce qui est facile.

→ 
$$P(x) = (x - 3i)(x + 3i)(x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})$$

## EXALG297 – FACS – ULB - Bruxelles, septembre 2007.

Factoriser au maximum le déterminant

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a-b & b-c & c-a \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$$

---

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a-b & b-c & c-a \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} & \stackrel{C_3=C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} a+b & b+c & 2(a+b+c) \\ a-b & b-c & 0 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & 0 \end{vmatrix} \\ & = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ (a+b)(a-b) & (b-c)(b+c) \end{vmatrix} \\ & = 2(a+b+c)(a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix} \\ & = \boxed{2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

---

05 Jan 08

## EXALG298 – FACS – ULB - Bruxelles, septembre 2007.

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ , en discutant en fonction du paramètre réel  $m$ , le système

$$\begin{cases} -x + (m^2 - 1)y + mz = m \\ m^2x + m^2y - (m^3 + 1)z = -m^3 \\ (1 - m^2)x - (2m^2 - 1)y + m^3z = 1 - m^2 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -1 & m^2 - 1 & m \\ m^2 & m^2 & -(m^3 + 1) \\ 1 - m^2 & -(2m^2 - 1) & m^3 \end{vmatrix} \stackrel{L1=L1+L2+L3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & m-1 \\ m^2 & m^2 & -(m^3 + 1) \\ 1 - m^2 & -(2m^2 - 1) & m^3 \end{vmatrix} \\ &= (m-1) \begin{vmatrix} m^2 & m^2 \\ 1 - m^2 & -(2m^2 - 1) \end{vmatrix} = m^2(m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 - m^2 & -(2m^2 - 1) \end{vmatrix} \\ &= m^2(m-1)(-2m^2 + 1 - 1 + m^2) = -m^4(m-1) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne  $m = 0$  et  $m = 1$  comme cas particuliers à étudier.

Le calcul des autres  $\Delta$ , en particulier  $\Delta_x$  est assez compliqué. On utilisera donc la méthode de Gauss pour le cas général.

1)  $\underline{m=0}$  Le système devient 
$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ -z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{Système impossible}$$

2)  $\underline{m=1}$  Le système devient

$$\begin{cases} -x + z = 1 \\ x + y - 2z = -1 \\ -y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L1+L2} \begin{cases} y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \rightarrow y = z \rightarrow x = z - 1$$

Système simplement indéterminé.

Opération	Ligne	Coeff			
	L1	-1	$m^2 - 1$	$m$	$m$
	L2	$m^2$	$m^2$	$-m^3 - 1$	$-m^3$
	L3	$1 - m^2$	$-2m^2 + 1$	$m^3$	$1 - m^2$
$L1 \times (-1)$	L4	1	$-m^2 + 1$	$-m$	$-m$
$L2 / m^2$	L5	1	1	$\frac{-m^3 - 1}{m^2}$	$-m$
$L3 / (1 - m^2)$	L6	1	$\frac{-2m^2 + 1}{1 - m^2}$	$\frac{m^3}{1 - m^2}$	1
L4	L7	1	$-m^2 + 1$	$-m$	$-m$
$L5 - L4$	L8	0	$m^2$	$-\frac{1}{m^2}$	0
$L6 - L4$	L9	0	$-\frac{m^4}{1 - m^2}$	$\frac{m}{1 - m^2}$	$1 + m$
L7	L10	1	$-m^2 + 1$	$-m$	$-m$
$L8 / m^2$	L11	0	1	$-\frac{1}{m^4}$	0
$L9 / \left(-\frac{m^4}{1 - m^2}\right)$	L12	0	1	$-\frac{1}{m^3}$	$-\frac{(1 + m)^2(1 - m)}{m^4}$
L10	L13	1	$-m^2 + 1$	$-m$	$-m$
L11	L14	0	1	$-\frac{1}{m^2}$	0
$L12 - L11$	L15	0	0	$\frac{-m + 1}{m^4}$	$-\frac{(1 + m)^2(1 - m)}{m^4}$

De L15, on trouve  $z$  :  $z = -\frac{(1 + m)^2(1 - m)}{m^4} \times \frac{m^4}{-m + 1} = -(1 + m)^2$

De L14, on trouve  $y$  :  $y = -\frac{(1 + m)^2}{m^4}$

De L13, on trouve  $x$  :  $x = -m + \frac{(-m^2 + 1)(1 + m)^2}{m^4} - m(1 + m)^2$

$$= \frac{1}{m^4} \left[ -m^5 + (-m^2 + 1)(1 + 2m + m^2) - m^5(1 + 2m + m^2) \right]$$

$$= \frac{1}{m^4} \left( -m^5 - m^2 + 1 - 2m^3 + 2m - m^4 + m^2 - m^5 - 2m^6 - m^7 \right)$$

$$= -\frac{1}{m^4} \left( m^7 + 2m^6 + 2m^5 + m^4 + 2m^3 - 2m - 1 \right)$$

## Résumé

$$m = 0$$

Système impossible

$$m = 1$$

Simple indétermination  $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = z \end{cases}$

$$\text{Dans les autres cas : } \begin{cases} x = -\frac{1}{m^4}(m^7 + 2m^6 + 2m^5 + m^4 + 2m^3 - 2m - 1) \\ y = -\frac{(1+m)^2}{m^4} \\ z = -(1+m)^2 \end{cases}$$

---

05 Jan 08

## EXALG299 – FACSA – ULG – Liège, septembre 2007.

a. Démontrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

b. Pour quelles valeurs du paramètre réel  $a$  le système suivant n'est-il pas de Cramer?

(Un système linéaire est dit de Cramer s'il admet une et une seule solution.)

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ a^2x + (a-2)^2y + (2a-1)^2z = 11-8a \\ a^4x + (a-2)^4y + (2a-1)^4z = 83-80a \end{cases}$$

c. Résoudre le système pour les valeurs de  $a$  trouvées au point b.

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

$$\begin{aligned} \text{On a } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ce qui se réduit à  $(b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$ .

Le déterminant du système proposé au point b est donc

$$\begin{aligned} \Delta &= (a^2 - (a-2)^2)((a-2)^2 - (2a-1)^2)((2a-1)^2 - a^2) \\ &= 2(2a-2)(3a-3)(-a-1)(3a-1)(a-1) \\ &= -12(a-1)^3(a+1)(3a-1). \end{aligned}$$

Ce déterminant s'annule pour  $a \in \{1, -1, 1/3\}$ .

Pour  $a = 1$ , le système se réduit à trois fois l'équation  $x + y + z = 3$ ;

l'ensemble des triplets solutions est donc  $\{(\lambda, \mu, 3-\lambda-\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ .

Pour  $a = -1$ , le système se réduit à

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 9y + 9z = 19 \\ x + 81y + 81z = 183 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} 81x + 81y + 81z = 243 \\ 9x + 81y + 81z = 171 \\ x + 81y + 81z = 163 \end{cases}$$

Par différence, on trouve  $8x = 8$  (II - III) et donc  $x = 1$ . En remplaçant  $x$  par sa valeur, chacune des trois équations se réduit à  $81y + 81z = 162$ , c'est-à-dire à  $y + z = 2$ .

L'ensemble des triplets solutions est donc  $\{(1, \lambda, 2-\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Pour  $a = 1/3$ , le système se réduit à :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \frac{x}{9} + \frac{25y}{9} + \frac{z}{9} = \frac{25}{3} \\ \frac{x}{81} + \frac{625y}{81} + \frac{z}{81} = \frac{169}{3} \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 25y + z = 75 \\ x + 625y + z = 4563 \end{cases}$$

Par différence, on trouve d'une part  $24y = 72$  (II - I) et d'autre part  $624y = 4560$  (III - II); ces deux égalités sont incompatibles et le système n'admet aucune solution.