Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 30

EXALG300 – EXALG309

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG300 – FACSA – ULG – Liège, septembre 2007.

Déterminer l'ensemble des valeurs (réelles) de m pour lesquelles l'énoncé:

$$\text{"Pour tout réel } x, \text{ on a } mx^2 - (m+1)^2 x + 2(m+1) \leq 0.\text{"}$$

est vrai.

Nous reprenons la solution proposée par l'université

Pour que le trinôme $ax^2 + bx + c$ soit toujours négatif, il faut $a < 0$ et $\rho = b^2 - 4ac < 0$
ou bien $a = b = 0$ et $c \leq 0$.

Dans le cas présent, le réalisant est $\rho = (m+1)^4 - 8(m+1)$

qui se factorise aisément en $(m+1)(m-1)(m^2 + 4m - 1)$.

Les racines de ce polynôme en m sont, par ordre croissant,

$$-2-\sqrt{5}, -1, -2+\sqrt{5}, 1.$$

- o Dans l'intervalle $]-\infty : -2-\sqrt{5}[$ on a $\rho > 0$ donc l'énoncé est faux.
- o Dans l'intervalle $[-2-\sqrt{5} : -1]$ on a $\rho \leq 0$ et $a = m < 0$ donc l'énoncé est vrai.
- o Dans l'intervalle $]-1 : -2+\sqrt{5}[$ on a $\rho > 0$ donc l'énoncé est faux.
- o Dans l'intervalle $]-2+\sqrt{5} : +1[$ on a $a = m > 0$ donc l'énoncé est faux.

En conclusion, l'énoncé est vrai si et seulement si $-2-\sqrt{5} \leq m \leq -1$.

Note : Un tableau de signe permet de définir rapidement les intervalles.

		$-2-\sqrt{5}$		-1		$-2+\sqrt{5}$		1	
m^2-1	+	+	+	0	−	−	−	0	+
m^2+4m-1	+	0	−	−	−	0	+	+	+
ρ	+	0	−	0	+	0	−	0	+

---

05 Jan 08

EXALG301 – FACSA – ULG – Liège, juillet 2008.

Résoudre l'inéquation

$$49x^3 + 126x^2 + 44x - 24 \leq 0$$

sachant que le polynôme du premier membre admet trois racines réelles en progression arithmétique.

Nous reprenons la solution proposée par l'université

Il existe un réel a et un réel positif b tels que les racines du polynôme du premier membre soient $a-b$, a et $a+b$; ce polynôme peut donc s'écrire $49(x-a+b)(x-a)(x-a-b)$ ou encore $49x^3 - 147ax^2 + 49(3a^2 - b^2)x - 49a^3 + 49ab^2$.

Par identification des coefficients du second degré, on trouve $a = -\frac{126}{147} = -\frac{6}{7}$.

Le polynôme est donc divisible par $x + \frac{6}{7}$ ou encore par $7x+6$; en fait, il se récrit en

$(7x+6)(7x^2+12x-4)$.

Par identification des coefficients du premier degré, on trouve $49b^2 = 64$ et $b = \frac{8}{7}$

Les racines du polynôme sont donc, dans l'ordre croissant, -2, $-\frac{6}{7}$ et $\frac{2}{7}$.

On en d´eduit que l'ensemble des solutions est la r'union de deux intervalles:

$$\left]-\infty : -2\right] \cup \left[-\frac{6}{7} : \frac{2}{7}\right]$$

Remarque. On peut éviter le calcul explicite de b^2 en résolvant directement l'équation

$7x^2 + 12x - 4 \; = \; 0$, dont les racines sont -2 et $\frac{2}{7}$.

---

05 Jan 08

EXALG302 – FACSA – ULG – Liège, juillet 2008.

1. Calculer toutes les racines sixièmes du nombre complexe *i* et évaluer la somme de leurs carrés.
2. Soient *n* et *p* deux entiers plus grands que 1. Evaluer la somme des *p*ièmes puissances des racines *n*ièmes de *i*

Nous reprenons (pour l'essentiel) la solution proposée par l'université

On commence par le deuxième point. Nous utilisons la notation "cis" comme abréviation de "$\cos\alpha + i\sin\alpha$. La formule de De Moivre s´ecrit donc : $(\text{cis}\,\alpha)^n = \text{cis}\,n\alpha$.

Une conséquence immédiate de cette formule est que les solutions de l´équation $z^n = \text{cis}\,\alpha$

forment l'ensemble : $\left\{\text{cis}\left(\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right) :\ k \in \{0,\ ...,\ n-1\}\right\}$.

La somme des *p*ièmes puissances des racines *n*ièmes de cis α se calcule alors facilement.

D'une part, si *p* est un multiple (entier) de *n*, chaque terme de la somme vaut cis $q\alpha$, avec $p = qn$, et la somme elle-même vaut n cis $q\alpha$. $\quad (1)$

D'autre part, si *p* n'est pas un multiple de *n*, on a le développement suivant:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left(\text{cis}\,\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)^p &= \sum_{k=0}^{n-1}\text{cis}\,\frac{p\alpha+2pk\pi}{n} && \text{(Formule de De Moivre))}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\text{cis}\,\frac{p\alpha}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\text{cis}\,\frac{2pk\pi}{n} && \text{(Voir Note 2)}\\
&= \text{cis}\,\frac{p\alpha}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\left(\text{cis}\,\frac{2p\pi}{n}\right)^k && \left(\text{Car } \frac{p\alpha}{n} \text{ est indépendant de } k\right)\\
&= \left(\text{cis}\,\frac{p\alpha}{n}\right).\frac{1-\left(\text{cis}\,\frac{2p\pi}{n}\right)^n}{1-\text{cis}\,\frac{2p\pi}{n}} && \left(\begin{array}{l}\text{Car } \sum_{k=0}^{n-1}\left(\text{cis}\,\frac{2p\pi}{n}\right)^k \text{ est une suite géométrique}\\ \text{de raison cis}\,\frac{2p\pi}{n} \text{ et de premier terme égal à 1}\end{array}\right)\\
&= \left(\text{cis}\,\frac{p\alpha}{n}\right).\frac{1-\text{cis}\,2p\pi}{1-\text{cis}\,\frac{2p\pi}{n}} && \text{(Formule de De Moivre)}\\
&= 0 && (\text{Car cis}\,2p\pi = 1 \to 1-\text{cis}\,2p\pi = 0)
\end{aligned}$$

Note 1 : (Si *p* est un multiple de *n*, on ne peut pas écrire les dernières lignes de ce développement car cis $\dfrac{2p\pi}{n}$ vaut 1).

On reprend maintenant la question spécifique posée ici.

On sait que $i = \text{cis } \dfrac{\pi}{2}$; la somme des $p$ièmes puissances des racines $n$ièmes de i est

$n \text{ cis } \left(\dfrac{q\pi}{2}\right)$. $\left(\text{On remplace } \alpha \text{ par } \dfrac{\pi}{2} \text{ dans la formule } (1)\right)$

Si $p = nq$, c'est-à-dire si p est un multiple de q, le résultat sera n, ni, $-n$ ou $-ni$ selon que $q \bmod 4 = 0,\ 1,\ 2$ ou 3, respectivement. $\left(\text{Voir Note 3}\right)$

Si p n'est pas un multiple de n, la somme demandée est nulle.
En particulier, 2 n'étant pas multiple de 6, la somme des carrés des racines sixièmes de i est nulle.
L'ensemble des racines est

$$\left\{\text{cis } \frac{(4k+1)\pi}{12} : k \in \{0, \ldots, 5\}\right\} \qquad \left(\text{car } \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6} = \frac{(4k+1)\pi}{12}\right)$$

Remarque. On peut aisément déterminer la forme algébrique des racines.
Par exemple, $\cos \dfrac{\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Note 2 : $\text{cis } (a+b) = \text{cis } a . \text{cis } b.$ Il suffit de développer chaque membre pour le vérifier.
Note 3 : $a \bmod b = c$ $\left(\text{mod = modulo}\right)$ signifie que le reste de la division de a par b est c.
Par exemple, le reste d'une division par 4 ne peut être que 0,1,2 ou 3.

Ici si

$$q \bmod 4 = 0 \rightarrow \frac{q\pi}{2} = 2k\pi \rightarrow n\text{cis}\left(\frac{q\pi}{2}\right) = n$$

$$q \bmod 4 = 1 \rightarrow \frac{q\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow n\text{cis}\left(\frac{q\pi}{2}\right) = ni$$

$$q \bmod 4 = 2 \rightarrow \frac{q\pi}{2} = (2k+1)\pi \rightarrow n\text{cis}\left(\frac{q\pi}{2}\right) = -n$$

$$q \bmod 4 = 3 \rightarrow \frac{q\pi}{2} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \rightarrow n\text{cis}\left(\frac{q\pi}{2}\right) = -ni$$

---

05 juillet 2008

EXALG303 – FSA – UCL – Louvain, juillet 2008, série 2.

Résoudre dans les réels, l'inéquation suivante :

$$1-\sqrt{\frac{x+1}{2x+1}} > \sqrt{\frac{4-x}{2x+1}}$$

Solution proposée par Steve Tumson

D'abord les conditions d'existence :

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2x+1} \geq 0 & \Rightarrow \ x \leq -1 \ ; \ x > \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{4-x}{2x+1} \geq 0 & \Rightarrow \ -\dfrac{1}{2} < x \leq 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{CE: \ -\frac{1}{2} < x \leq 4} \ (1)$$

Une racine carrée étant toujours positive, on peut multiplier par les dénominateurs des deux fractions :

$$\sqrt{2x+1} > \sqrt{4-x} + \sqrt{x+1}$$

Les deux membres sont positifs, on peut les élever au carré :

$$2x+1 > 4-x+x+1+2\sqrt{(4-x)(x+1)} \Leftrightarrow x-2 > \sqrt{(4-x)(x+1)}$$

Pour pouvoir élever l'inéquation au carré, le membre de gauche doit être positif et donc :

$$\boxed{x \geq 2} \quad (2)$$

Sous cette condition, on peut écrire :

$$(x-2)^2 > (4-x)(x+1) \Leftrightarrow x(2x-7) > 0 \Leftrightarrow \boxed{x < 0 \quad ; \quad x > \frac{7}{2}}$$

Vu les conditions (1) et (2), la solution est finalement :

$$\boxed{S = \left\{ x \in \mathbb{R} \ \ tq \ \ \frac{7}{2} < x \leq 4 \right\}}$$

---

24 juillet 2008 (Relu par Benoit Baudelet)

EXALG304 – FSA – UCL – Louvain, juillet 2008, série 2.

Résoudre dans les réels, l'équation suivante :

$$\left(3^x-5\right)^2=3^{2x-1}-11$$

Solution proposée par Steve Tumson

Il s'agit d'un second degré en 3^x :

$$\left(3^x-5\right)^2=3^{2x-1}-11\Leftrightarrow 3^{2x}+25-\left(10\times 3^x\right)=3^{2x-1}-11\Leftrightarrow 3^{2x}-\left(10\times 3^x\right)-\frac{1}{3}3^{2x}+36=0$$

$$\xrightarrow{3^x=y} y^2-10y-\frac{1}{3}y^2+36=0\Leftrightarrow y^2-15y+54=0\Leftrightarrow y=9\ ;\ y=6$$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases} y=3^x=9\Rightarrow x=\log_3 9=2\\ y=3^x=6\Rightarrow x=\log_3 6\simeq 1,63\end{cases}}$$

---

24 juillet 2008 (Relu par Benoit Baudelet). Modifié le 12 septembre 2009 (Paul Etienne)

EXALG305 – FSA – UCL – Louvain, juillet 2008, série 2.

Résoudre dans les réels, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x-|y+1|=1 \\ x^2+y=10 \end{cases}$$

Solution proposée par Steve Tumson

1) $y+1>0 \Leftrightarrow y>-1$

$$\begin{cases} x-y-1=1 \\ x^2+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ \quad\downarrow \\ x^2+x-12=0 \Rightarrow \boxed{(x=3, y=1)} \ et \ (x=-4, y=-6) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$A\ rejeter:\ y>-1$$

2) $y+1<0 \Leftrightarrow y<-1$

$$\begin{cases} x+y+1=1 \\ x^2+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ \quad\downarrow \\ x^2-x-10=0 \Rightarrow \boxed{\left(x=\frac{1+\sqrt{41}}{2}, y=-\frac{1+\sqrt{41}}{2}\right)} \ et \ \left(x=\frac{1-\sqrt{41}}{2}, y=-\frac{1-\sqrt{41}}{2}>0\right) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$A\ rejeter:\ y<-1$$

Finalement:

$$\boxed{S=\left\{(x=3, y=1), \left(x=\frac{1+\sqrt{41}}{2}, y=-\frac{1+\sqrt{41}}{2}\right)\right\}}$$

---

24 juillet 2008 (Relu par Benoit Baudelet)

EXALG306 – FSA – UCL – Louvain, juillet 2008, série 2.

Un groupe de cinq étudiants électromécaniciens dispose de cinq jours pour réaliser un projet en robotique (travail de groupe).
Ils disposent d'un local (le Faraday) dans lequel se trouve l'équipement nécessaire et chaque jour deux étudiants y travaillent pour faire avancer le projet.
Le gestionnaire des locaux désire savoir combien d'heures le groupe a occupé le local pour CHAQUE jour de la semaine (du lundi au vendredi).
Il dispose des informations suivantes :

- Il sait que Cédric a été le plus courageux et a largement contribué au succès du projet en y travaillant 18 heures
- Stivy a travaillé 14 heures et Maxime 10 heures, c'est-à-dire deux heures de moins que Gaëtan.
- Quant à Nicolas, il ne s'est vraiment pas investi beaucoup dans le travail de groupe puisqu'il a travaillé trois fois moins que Cédric !
- De plus, il sait que Cédric et Stivy étaient présent le lundi, Maxime et Stivy le mardi, Maxime et Nicolas le mercredi, Nicolas et Gaëtan le jeudi, et Cédric et Gaëtan le vendredi.

Solution proposée par Steve Tumson

Si on note :

- L, Ma, Me, J et V les heures de travail dans le local respectivement lundi, mardi, mercredi, jeudi et vendredi
- C, S, G, M et N les heures prestées par un étudiant, respectivement Cédric, Stivy, Gaëtan, Maxime et Nicolas

La dernière indication nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} L = C_1 = S_1 \\ Ma = M_1 = S_2 \\ Me = M_2 = N_1 \\ J = N_2 = G_1 \\ V = C_2 = G_2 \end{cases}$$

Les trois premières indications nous donnent les heures de travail de chaque étudiant au bout de la semaine de travail :

$$\begin{cases} C = C_1 + C_2 = 18 \\ S = S_1 + S_2 = 14 \\ G = G_1 + G_2 = 12 \\ M = M_1 + M_2 = 10 \\ N = N_1 + N_2 = 6 \end{cases}$$

Il reste à additionner judicieusement les lignes du premier système pour retrouver les éléments connus du deuxième système pour obtenir un système linéaire de 5 équations à 5 inconnues :

$$\begin{cases} L + V = C = 18 \\ L + Ma = S = 14 \\ J + V = G = 12 \\ Ma + Me = M = 10 \\ Me + J = N = 6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} L = 8h \\ Ma = 6h \\ Me = 4h \\ J = 2h \\ V = 10h \end{cases}}$$

---

24 juillet 2008 (Relu par Benoit Baudelet)

EXALG307 – FSA – UCL – Louvain, juillet 2008, série 1.

Calculez les racines complexes de l'équation suivante:

$$z^2+(a+2i)z-\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)-i=0$$

Quelle valeur donner au paramètre "a" pour qu'une racine de l'équation soit purement imaginaire?

Solution proposée par Steve Tumson

C'est une équation du second degré en "z", calculons son discriminant :

$$\rho=(a+2i)^2-4\left(-\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)-i\right)=a^2+4i^2+4ai+2a+1+4i=a^2+(4i+2)a+4i-3$$

Nous avons maintenant un second degré en "a", calculons son discriminant afin de factoriser l'expression précédente :

$$\begin{aligned}
&\Delta=(4i+2)^2-4\left(4i-3\right)=16i^2+4+16i-16i+12=0\\
&\qquad\to a_{1,2}=\frac{-(4i+2)}{2}=-2i-1\\
&\qquad\Rightarrow \rho=a^2+(4i+2)a+4i-3=(a+2i+1)^2
\end{aligned}$$

On peut donc trouver les racines de l'équation de départ :

$$\boxed{\begin{aligned}
z_1&=\frac{-(a+2i)+(a+2i+1)}{2}=\frac{1}{2}\\
z_2&=\frac{-(a+2i)-(a+2i+1)}{2}=-\frac{2a+4i+1}{2}
\end{aligned}}$$

Pour qu'une racine soit purement imaginaire il faut que la partie réelle de z_2 soit nulle :

$$\boxed{2a+1=0\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}}$$

---

24 juillet 2008 (Relu par Benoit Baudelet)

EXALG308 – FSA – UCL – Louvain, juillet 2008, série 1.

Etablissez la condition d'existence dans R de l'expression suivante :

$$\sqrt{1-\left(x-\frac{2}{x}\right)^4}$$

Solution proposée par Steve Tumson

Il faut bien entendu : $1-\left(x-\frac{2}{x}\right)^4 \geq 0$

L'expression peut se factoriser par un binôme conjugué : $\left(1-\left(x-\frac{2}{x}\right)^2\right)\left(1+\left(x-\frac{2}{x}\right)^2\right) \geq 0$

Ou encore : $\left(1-\left(x-\frac{2}{x}\right)\right)\left(1+\left(x-\frac{2}{x}\right)\right)\underbrace{\left(1+\left(x-\frac{2}{x}\right)^2\right)}_{\text{TOUJOURS POSITIF}} \geq 0$

Le dernier terme étant toujours positif et jamais nul dans R, l'étude du signe se réduit à la résolution de :

$$\left(1-x+\frac{2}{x}\right)\left(1+x-\frac{2}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{-x^2+x+2}{x}\right)\left(\frac{x^2+x-2}{x}\right) \geq 0$$

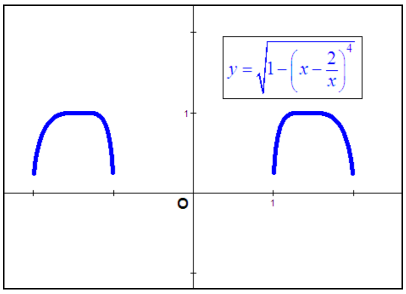
Par la factorisation d'Horner ou par la recherche des racines à l'aide du discriminant, on factorise les seconds degrés :

$$\left(\frac{(2-x)(x+1)}{x}\right)\left(\frac{(x-1)(x+2)}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2-x)(x+1)(x-1)(x+2)}{x^2} \geq 0$$

L'étude de signe est maintenant triviale :

		-2		-1		0		1		2	
$2-x$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	−
$x+1$	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+
$x+2$	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
x^2	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	−	[0	+	0]	−	/	−	[0	+	0]	−

$\Rightarrow \boxed{dom\, f : [-2,-1] \cup [1,2]}$



---

24 juillet 2008 (Relu par Benoit Baudelet)

EXALG309 – FSA – UCL – Louvain, juillet 2008, série 1.

Soit un polynôme réel :

$$P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 5$$

Déterminez ses coefficients b, c et d sachant que :

- $P(x)$ est divisible par $\left(x^2 - x - 1\right)$
- Le reste de la division de $P(x)$ par $(x+1)$ est égal à 9

Solution proposée par Steve Tumson

La première indication nous permet d'affirmer que :

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 5 = (x^2 - x - 1)(Kx^2 + Lx + M)$$

En développant le terme de droite, on obtient :

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 5 = Kx^4 + (L-K)x^3 + (M-K-L)x^2 + (-M-L)x - M$$

Il découle d'emblée que : $\begin{cases} K = 1 \\ M = 5 \\ L - K = L - 1 = b \\ M - K - L = 4 - L = c \\ -M - L = -5 - L = d \end{cases}$

On peut en déduire deux relations entre les 3 coefficients à déterminer, via L :

$$L = \overbrace{b + 1 = 4 - c}^{b+c=3} \underbrace{= -5 - d}_{c-d=10}$$

- La deuxième indication nous donne, en vertu de la loi du reste :

$$P(-1) = 1 - b + c - d - 5 = 9 \Leftrightarrow c - b - d = 13$$

Nous obtenons donc un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} b + c = 3 \\ c - d = 9 \\ -b + c - d = 13 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = -4 \quad c = 7 \quad d = -2}$$

---

24 juillet 2008 (Relu par Benoit Baudelet)