Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 33

EXALG330 – EXALG339

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Juillet 09

EXALG330 – FACSA – ULG – Liège, juillet 2009.

Soit $P(x)$ un polynôme sur $\mathbb{R}$. Le reste de la division de $P(x)$ par $x-1$ est 1 et le reste de la division de $P(x)$ par $x+1$ est -1.

- Quel est le reste de la division de $P(x)$ par x^2-1?
- Soit $Q(x)$ et $R(x)$ les polynômes quotient et rest de $P(x^2)$ par x^2+1. Déterminer le polynôme $R(x)$
- Déterminer le polynôme reste de la division de $Q(x)$ par x^2-1

Nous reprenons, la solution proposée par l'université.
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

On sait que le reste de la division de $P(x)$ par $x-c$ est $P(c)$. On a donc $P(1)=1$ et $P(-1)=-1$. D'autre part, le reste de la division de $P(x)$ par x^2-1 est l'unique polynôme $ax+b$ pour lequel le polynôme $S(x)$ existe tel que

$$P(x)=(x^2-1)S(x)+ax+b$$

En remplaçant successivement par x par 1 et -1, on obtient $1=a+b$ et $-1=-a+b$, d'où $a=1$ et $b=0$; le reste de la division par x^2-1 est donc le polynôme x, et $P(x)=(x^2-1)S(x)+x$.

On déduit de cela :

$$\begin{aligned}P(x^2)&=(x^4-1)S(x^2)+x^2\\&=(x^2+1)(x^2-1)S(x^2)+x^2+1-1\\&=(x^2+1)\left[(x^2-1)S(x^2)+1\right]-1\end{aligned}$$

On a donc

$$Q(x)=(x^2-1)S(x^2)+1 \quad \text{et} \quad R(x)=-1$$

De plus, le polynôme reste de la division de $Q(x)$ par x^2-1 est 1

---

20 juillet 2009

EXALG331 – FACSA – ULG – Liège, juillet 2009.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2\left(1-z^2\right)=16$$

Nous reprenons, la solution proposée par l'université.
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

En posant $Z=z^2$, on obtient $Z(1-Z)=16$ ou encore $Z^2-Z+16=0$. Le réalisant (discriminant) de cette équation est $-63=-7\times 3^2$; l'équation admet les deux solutions complexes conjuguées

$$\frac{1\pm 3\sqrt{7}i}{2}$$

Pour trouver z, on utilise la règle suivante. Si b est positif, les solutions (x,y) de $a\pm bi=(x+yi)^2$ sont

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\ ;\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\ ;-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

Dans le cas présent, on a $a=\frac{1}{2}$; $a^2=\frac{1}{4}$; $b^2=\frac{63}{4}$; $a^2+b^2=16$ et $\sqrt{a^2+b^2}=4$, d'où les quatre solutions :

$$\frac{3+i\sqrt{7}}{2} \qquad \frac{-3+i\sqrt{7}}{2} \qquad \frac{3-i\sqrt{7}}{2} \qquad \frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$$

---

20 juillet 2009

EXALG332 – EPL, UCL, Louvain, Série 1, juillet 2009.

a) Combien de racines n-ièmes complexes possède un nombre complexe, et comment se répartissent-elles dans le plan complexe (ou plan de Gauss) ? (Réponse: 2 lignes max.)

b) On considère l'équation en z dans les Complexes :

$$(3-4i)z^4-(1+mi)^2=0$$

où m est un paramètre réel et i l'unité imaginaire.

Déterminez la (ou les) valeur(s) du paramètre m pour que cette équation possède au moins une racine en z réelle, et pour cette (ou ces) valeur(s) de m, déterminez toutes les racines z réelles et/ou complexes. (Réponses sous la forme $(a+bi)$ ou (r,φ) au choix).

Solution proposée par Steve Tumson

a) Un nombre complexe $z=r\,cis(\varphi)$ possède n racines n-ièmes distinctes. Dans le plan de Gauss, elles sont les sommets d'un polygone régulier de n cotés inscrit au cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ et de centre O.

b) Essayons d'utiliser ce qui vient d'être dit. $(3-4i)z^4-(1+mi)^2=0$

On remet sous la forme $a+bi$:

$$z^4=\frac{(1+mi)^2}{(3-4i)}=\frac{1}{25}(3+4i)(1-m^2+2mi)=\frac{1}{25}\left(\left[-3m^2-8m+3\right]+i\left[-4m^2+6m+4\right]\right)$$

Puisque la solution d'une racine n-ième sous forme trigonométrique s'écrit :

$$z_k=\sqrt[n]{r}\,cis\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\qquad \forall k\in 0,1,2,\ldots,n$$

Le coefficient de la partie imaginaire s'écrit donc, dans notre cas: $\sin\left(\frac{\varphi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)$

Sur l'intervale $[\,0,2\pi\,[$, la seule façon d'annuler la partie imaginaire est d'avoir $\varphi=0$ (pour les k pairs)

Ou encore :

$$\varphi=Arc\tan\left(\frac{-4m^2+6m+4}{-3m^2-8m+3}\right)=0\Leftrightarrow -4m^2+6m+4=0\Leftrightarrow \boxed{m_1=2\ \text{ ou }\ m_2=-\frac{1}{2}}$$

L'équation de base se réécrit alors :

si $x=2$ $\quad\Rightarrow z^4=-1$ $\quad$ Donc $m=2$ est à rejeter

si $x=-\frac{1}{2}$ $\quad\Rightarrow z^4=\frac{1}{4}$

Les solutions sont donc :

$$\boxed{z_k=\frac{\sqrt{2}}{2}\,cis\left(k\frac{\pi}{2}\right)}\qquad \forall k\in 0,1,2,3$$

Ou sous forme $a+bi$

$$\boxed{\begin{cases} z_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ z_{3,4}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\end{cases}}$$

Solution proposée par Paul Etienne

Soit z une racine réelle, on a alors :

$$(3-4i)z^4-(1+mi)^2=0 \to 3z^4-4iz^4-1-2mi+m^2=0$$

$$\to \begin{cases} 3z^4-1+m^2=0 \\ -4z^4-2m=0 \end{cases} \to \begin{cases} 3z^4-1+m^2=0 \\ z^4=-\dfrac{m}{2} \end{cases} \to -\frac{3}{2}m-1+m^2=0 \to 2m^2-3m-2=0$$

Et on retombe sur la même équation que plus tôt, et donc les mêmes solutions :

$$\boxed{m=2 \quad (\text{à rejeter}) \qquad\qquad m=-\frac{1}{2}}$$

Le 8 aout 2009 ; Modifié le 11 septembre 2009 (Paul Etienne). Modifié le 22 septembre 2010 (Nicole Berckmans)

EXALG333 – EPL, UCL, Louvain, Série 1, juillet 2009.

Résoudre dans $\Re$ l'équation

$$15^{\log_5 3} x^{(\log_5 9x)+1} = 1$$

Solution proposée par Steve Tumson

$$15^{\log_5 3} x^{(\log_5 9x)+1} = 1 \Leftrightarrow x^{(\log_5 9x)+1} = 15^{-\log_5 3}$$

La fonction logarithme étant bijective pour les x positifs, on peut écrire :

$$\left((\log_5 9x)+1\right)(\ln x) = -(\log_5 3)(\ln 15)$$

On repasse en base e (pas obligatoire, question de goût :)

$$(\ln 9x + \ln 5)\ln x = -(\ln 3)(\ln 15) \Leftrightarrow (\ln 45x)(\ln x) = -(\ln 3)(\ln 15)$$

$$\Leftrightarrow (\ln 45x)\left(\ln \frac{45x}{45}\right) = -(\ln 3)(\ln 15) \Leftrightarrow (\ln 45x)(\ln 45x - \ln 45) = -(\ln 3)(\ln 15)$$

$$\Leftrightarrow (\ln^2 45x) - (\ln 45)(\ln 45x) + (\ln 3)(\ln 15) = 0$$

On a un second degré en $t = \ln(45x)$

$$At^2 + Bt + C \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -\ln 45 \\ C = (\ln 3)(\ln 15) \end{cases}$$

Le discriminant est :

$$\delta = \ln^2 45 - 4(\ln 3)(\ln 15) = (\ln 3 + \ln 15)^2 - 4(\ln 3)(\ln 15) = (\ln 15 - \ln 3)^2$$

Les solutions sont alors :

$$t_{1,2} = \frac{\ln 45 \pm \sqrt{\delta}}{2} = \frac{\ln 45 \pm (\ln 15 - \ln 3)}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{\ln 45 + (\ln 15 - \ln 3)}{2} = \dfrac{1}{2}\ln(225) = \ln(15) \\ t_2 = \dfrac{\ln 45 - (\ln 15 - \ln 3)}{2} = \dfrac{1}{2}\ln(9) = \ln(3) \end{cases}$$

Finalement, il vient les deux solutions :

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{45}e^{\ln(15)} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{1}{45}e^{\ln(3)} = \frac{1}{15}}$$

Le 8 aout 2009

EXALG334 – EPL, UCL, Louvain, Série 1, juillet 2009.

Déterminez les coefficients d'un polynôme $P(x)$ sachant que:

- il est du 4ème degré
- la somme des racines vaut $+6$
- le produit des racines vaut -24
- il est divisible par $\left(x^2-2x-8\right)$
- le reste de sa division par $(x-2)$ vaut $+8$

et calculez les 4 racines de ce polynôme.

Solution proposée par Steve Tumson

Le polynôme s'écrit :

$$P(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

avec ses racines $x_1, x_2, x_3, x_4 : P\left(x_1\right) = P\left(x_2\right) = P\left(x_3\right) = P\left(x_4\right) = 0$

Les deux premières informations donnent :

$$\sum_{n=1}^{4} x_n = 6 \qquad \text{et} \qquad \prod_{n=1}^{4} x_n = -24$$

La troisième indication nous dit que le polynôme est divisible par $\left(x^2-2x-8\right) = (x+2)(x-4)$

On va donc écrire que $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$ et en déduire :

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 4 \\ x_3 x_4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 4 - x_3 \\ -x_3^2 + 4x_3 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

On a donc le système suivant de 5 équations à 5 inconnues :

$$\begin{cases} P\left(x_1\right) = 0 \Leftrightarrow 16A - 8B + 4C - 2D + E = 0 \\ P\left(x_2\right) = 0 \Leftrightarrow 256A + 64B + 16C + 4D + E = 0 \\ P\left(x_3\right) = 0 \Leftrightarrow A + B + C + D + E = 0 \\ P\left(x_4\right) = 0 \Leftrightarrow 81A + 27B + 9C + 3D + E = 0 \\ P(2) = 8 \Leftrightarrow 16A + 8B + 4C + 2D + E = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -6 \\ C = 3 \\ D = 26 \\ E = -24 \end{cases}$$

Le 8 aout 2009

EXALG335 – EPL, UCL, Louvain, Série 1, juillet 2009.

Maxime et Pauline se rendent au marché local pour vendre leurs produits et faire quelques achats. Ils apportent les pralines qu'ils ont fabriquées et leurs économies pour acheter du poisson et de la viande.

Tout d'abord, ils échangent un kilo de viande et un kilo de poisson contre un kilo de leurs pralines et un supplément d'un Euro. Ensuite, ils font un second achat en échangeant deux kilos de viande et un kilo de poisson contre 5 ballotins de pralines et un supplément de sept Euros (un ballotin = 250 grammes).

Lorsqu'ils reviennent encore une fois le lendemain ils veulent à nouveau faire deux achats. Un kilo de viande leur coute un ballotin de pralines et huit Euros de supplément pour le premier achat. Pour le dernier achat, trois kilos de viande et quatre kilos de poisson reviennent à trois kilos de pralines et un supplément de vingt-deux Euros.

Une fois rentrés chez eux, Pauline fait les comptes et dit à son frère Maxime que pour un des deux derniers achats le commerçant s'est trompé. Pauline a-t-elle raison ? Pour quel achat y a-t-il eu une erreur ?

Sur base des trois achats corrects, calculez en Euros la valeur d'un kilo de poisson, d'un kilo de viande et d'un ballotin de pralines. Justifiez qu'un des achats était erroné et donnez le montant de l'erreur en Euros.

Solution proposée par Steve Tumson

On pose : $\begin{cases} V & = \text{ prix d'un kilo de viande en Euros} \\ P & = \text{ prix d'un kilo de poisson en Euros} \\ B & = \text{ prix d'un ballotin de pralines en Euros} \end{cases}$

Tous les achats peuvent se mettre sous forme du système algébrique suivant :

$$\begin{cases} V + P = 4B + 1 \\ 2V + P = 5B + 7 \\ V = B + 8 \\ 3V + 4P = 12B + 22 \end{cases}$$

Supposons que le 4e achat est erroné, on aurait le juste prix avec le système :

$$\begin{cases} V + P = 4B + 1 \\ 2V + P = 5B + 7 \\ V = B + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = 3B - 7 \\ P = 3B - 9 \\ V = B + 8 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Système impossible}$$

Si c'est le 3e achat qui est erroné, on aurait, pour les achats corrects :

$$\begin{cases} V + P = 4B + 1 \\ 2V + P = 5B + 7 \\ 3V + 4P = 12B + 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = 14 \text{ Euros} \\ P = 19 \text{ Euros} \\ B = 8 \text{ Euros} \end{cases}$$

Le troisième achat est donc bien erroné : Maxime et Pauline ont donné deux Euros de trop pour l'achat du kilo de viande.

Le 8 aout 2009

EXALG336 – EPL, UCL, Louvain, Série 2, juillet 2009.

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel a, le système suivant dans $\Re$:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x\leq 1 \\ x-y+a=0 \end{cases}$$

admet-il une solution unique, c'est-à-dire une paire de réels (x_1, y_1) (unique pour chaque valeur de a déterminée) ? Déterminez ces valeurs de x_1 et y_1.

Solution proposée par Steve Tumson

En injectant la seconde équation dans la première :

$$2x^2+2(a+1)x+(a^2-1)\leq 0$$

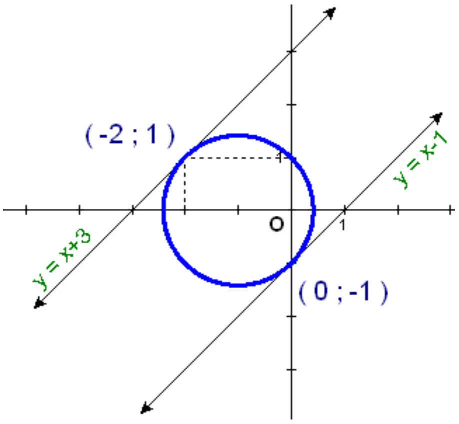
Le discriminant :

$$\rho=4(a+1)^2-8(a^2-1)=4(3-a)(a+1)$$

Une solution unique implique un discriminant nul : $a=3$ et $a=-1$

Les solutions sont alors : $\begin{cases} (x=-2, y=1) \text{ pour } a=3 \\ (x=0, y=-1) \text{ pour } a=-1 \end{cases}$

N.B : On pouvait déjà prévoir qu'il y aurait deux valeurs de a répondant à nos attentes. En effet, la première inéquation représente géométriquement un disque et la deuxième représente une droite de coefficient angulaire donnée mais variable verticalement. Résoudre le système consistait en fait à trouver les tangentes au cercle (car un seul point de contact) pour une pente donnée : deux. On voit que si on choisi un paramètre a entre -1 et 3, la droite traverse le disque et on a donc une infinité de solutions. Si on se situe en dehors de cet intervale, les droites n'intersectent jamais le disque et il n'y a donc aucune solution.



Le 6 aout 2009

EXALG337 – EPL, UCL, Louvain, Série 2, juillet 2009.

Résoudre dans les réels l'équation suivante :

$$2\log_4(x+1)+\frac{1}{2}\log_4(x^2+6x+9)=\log_4(6x+2)+\frac{1}{2}$$

Solution proposée par Steve Tumson

D'abord les conditions d'existence :

$$\begin{cases} x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \\ x^2+6x+9>0 \Leftrightarrow (x+3)^2>0 \rightarrow \text{Toujours vérifié} \\ 6x+2>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \text{C.E : } \boxed{x>-\frac{1}{3}}$$

Résolvons maintenant l'équation :

$$2\log_4(x+1)+\frac{1}{2}\log_4(x^2+6x+9)=\log_4(6x+2)+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_4(x+1)^2+\log_4\left(\sqrt{(x+3)^2}\right)=\log_4(6x+2)+\log_4(2)$$

$$\Leftrightarrow \log_4\left((x+1)^2|x+3|\right)=\log_4\left(2(6x+2)\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2|x+3|=4(3x+1)$$

Vu les conditions d'existence, on a $|x+3|=x+3$

$$\Rightarrow (x+1)^2(x+3)=4(3x+1)\Leftrightarrow x^3+x+2x^2+3x^2+3+6x=12x+4\Leftrightarrow x^3+5x^2-5x-1=0$$

$$\xrightarrow{HORNER}(x-1)(x^2+6x+1)=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x-\left(-3+2\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(-3-2\sqrt{2}\right)\right)=0$$

On a donc les solutions suivantes :

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-3+2\sqrt{2} \\ x=-3-2\sqrt{2}<-\frac{1}{3}\rightarrow \text{A rejeter !} \end{cases} \Rightarrow \boxed{S=\left(-3+2\sqrt{2}\,;1\right)}$$

Le 6 aout 2009

EXALG338 – EPL, UCL, Louvain, Série 2, juillet 2009.

Trouvez 5 nombres en progression géométrique tels que la somme des 5 nombres égale 363, et la somme du 2e et 4e nombre vaut 90. Mettez ce problème en équation puis résolvez-le.

Solution proposée par Steve Tumson

Une suite géométrique de raison k est définie par $u_n = ku_{n-1}$

La somme du 2e et 4e nombre vaut 90 : $u_2 + u_4 = 90 \Leftrightarrow ku_1 + k^3u_1 = 90 \Leftrightarrow u_1\left(k + k^3\right) = 90$ (1)

Puisque la somme des 5 vaut 363, il reste : $u_1 + u_3 + u_5 = 273 \Leftrightarrow u_1 + k^2u_1 + k^4u_1 = 273 \Leftrightarrow u_1\left(1 + k^2 + k^4\right) = 273$ (2)

En divisant(1) par (2) pour éliminer u_1, on obtient :

$$\frac{k + k^3}{1 + k^2 + k^4} = \frac{90}{273} = \frac{30}{91} \Leftrightarrow 30k^4 - 91k^3 + 30k^2 - 91k + 30 = 0$$

Il suffit de trouver une solution de cette équation pour trouver les 5 nombres demandés.

Après quelques essais par Horner, on peut voit que ce polynôme est factorisable par $(k-3)$

$$\Rightarrow (k-3)\left(30k^3 - k^2 + 27k - 10\right) = 0$$

Une des solutions est donc donnée par la raison $k = 3$

On peut alors trouver le premier terme de la suite par (1) ou (2) pour obtenir $u_1 = 3$

La progression géométrique est donc constitué des 5 nombres suivants : $\{3, 9, 27, 81, 243\}$

N.B : Il est évident qu'une autre solution est de prendre cette suite mais à l'envers. En effet, sur base de cette remarque, on peut vérifier par Horner que le polynôme restant de la factorisation est factorisable par $\left(k - \frac{1}{3}\right)$

$$\Rightarrow 3(k-3)\left(k - \frac{1}{3}\right)\left(10k^2 + 3k + 10\right) = 0$$

L'autre solution est donc donnée par la raison inverse $k = \frac{1}{3}$

On trouve maintenant par (1) ou (2) que $u_1 = 243$ et donc la suite inversée est $\{243, 81, 27, 9, 3\}$

Le discriminant du second degré est négatif, il n'y a donc pas d'autres solutions.

Solution proposée par Jan Frans Broeck

Mise en équations

Notons u_3 le terme du milieu et q la raison de la suite géométrique. Les cinq nombres sont alors :

$$\frac{1}{q^2}u_3\,,\ \frac{1}{q}u_3\,,\ u_3\,,\ qu_3\,,\ q^2u_3 \qquad \text{avec } u_3 \neq 0, q \neq 0 \text{ et } q \neq 1$$

Les données se traduisent alors par les deux équations suivantes :

$$\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1+q+q^2\right)u_3 = 363 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\left(\frac{1}{q}+q\right)u_3 = 90 \qquad \textbf{(2)}$$

Résolution

$$\textbf{(1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{q^2}(1+q+q^2+q^3+q^4)u_3 = 363 \qquad \textbf{(3)}$$

$$\textbf{(2)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{q}(1+q^2)u_3 = 90 \qquad \textbf{(4)}$$

Divisons l'équation **(3)** par l'équation **(4)** pour éliminer u_3 :

$$\frac{1+q+q^2+q^3+q^4}{q+q^3} = \frac{121}{30}$$

$$\Leftrightarrow \quad 30(1+q+q^2+q^3+q^4) = 121(q+q^3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{P(q) \equiv 30q^4 - 91q^3 + 30q^2 - 91q + 30 = 0} \qquad \textbf{(5)}$$

Les *racines réelles* de cette équation du 4e degré sont les valeurs possibles pour la raison d'une suite géométrique vérifiant les données du problème.

Un polynôme du 4e degré à coefficients réels peut avoir 4, 2 ou 0 racines réelles. Il n'existe pas de méthode générale simple pour la résolution d'une équation du 4e degré. Ce qui rend sa résolution possible dans ce cas précis, est la forme particulière de l'équation, qui est due à la nature du problème :

> *Si $q = a$ est la raison d'une suite géométrique de cinq nombres vérifiant les conditions du problème, alors $q = \frac{1}{a}$ est également la raison d'une autre suite de cinq nombres vérifiant les conditions du problème, et consistant en les mêmes cinq nombres écrits dans l'ordre inverse.*

Dans ce cas, a et $\frac{1}{a}$ sont deux racines du polynôme, qui est donc divisible par :

$$(q-a)\left(q-\frac{1}{a}\right) = q^2 - \frac{a^2+1}{a}q + 1$$

Le quotient est un autre trinôme du second degré, dont le coefficient du terme en q^2 et le terme indépendant sont tous les deux égales à $+30$, et dont seulement le coefficient de q est une inconnue que nous notons par b. Le polynôme se factorise donc comme suit :

$$P(q) \equiv 30q^4 - 91q^3 + 30q^2 - 91q + 30 = \left(q^2 - \frac{a^2+1}{a}q + 1\right)(30q^2 + bq + 30) \qquad \textbf{(6)}$$

Appliquons la méthode des coefficients indéterminés au coefficients des termes du 1[er], 2[e] et 3[e] degré :

$$\begin{cases} -91 &= -30\frac{a^2+1}{a}+b \\ +30 &= -b\frac{a^2+1}{a}+60 \\ -91 &= -30\frac{a^2+1}{a}+b \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \frac{a^2+1}{a} = \frac{30}{b} & (7) \\ -91 = -\frac{900}{b}+b & (8) \end{cases}$$

L'équation (8) nous permet de calculer les valeurs possibles pour l'inconnu b :

$$(8) \quad \Leftrightarrow \quad b^2+91b-900=0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 91.91+4.900 = 11881 \\ \sqrt{\Delta} &= 109 \\ b_{1,2} &= \tfrac{1}{2}(-91\pm 109) \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -100 \\ b_2 = +9 \end{cases} \end{aligned}$$

Remplaçons successivement chacune des deux valeurs trouvées pour b dans l'équation (7) pour calculer les éventuelles valeurs correspondantes de la racine a.

Avec $b_1 = -100$:

$$(7) \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2+1}{a} = -\frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow \quad 10a^2+3a+10=0$$

$$\Delta = 9-400 = -391 < 0$$

Il n'y a donc pas de racines réelles et cette valeur de b est à rejeter.

Avec $b_2 = +9$:

$$(7) \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2+1}{a} = +\frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3a^2-10a+3=0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 100-36 = 64 \\ \sqrt{\Delta} &= 8 \\ a_{1,2} &= \tfrac{1}{6}(10\pm 8) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

L'unique factorisation du polynôme est donc :

$$P(q) \equiv 30q^4-91q^3+30q^2-91q+30 = (q-3)\left(q-\frac{1}{3}\right)(30q^2+9q+30)$$

Dans les réels, c'est la factorisation complète du polynôme puisque le discriminant du trinôme $30q^2+9q+30$ est négatif.

Réponse :

Les deux seules raisons possibles pour les suites géométriques de cinq nombres sont donc $\boldsymbol{q=3}$ et $\boldsymbol{q=\frac{1}{3}}$. Avec chacune de ces deux valeurs, l'équation (2) donne $u_3 = 27$. Les deux suites de cinq nombres sont :

3 , 9 , 27 , 81 , 243 et 243 , 81 , 27 , 9 , 3

Le 6 aout 2009. Modifié le 12 septembre 2009 (Paul Etienne). Modifié le 27 janvier 2012 (Jan Frans Broeckx)

EXALG339 – EPL, UCL, Louvain, Série 2, juillet 2009.

Charlotte, Clémence et Maelle ont décidé de fêter la fin des examens de manière originale : pourquoi pas une grande soirée déguisement ? C'est décidé, Clémence et Charlotte se donnent rendez-vous chez Maelle. La première a emmené toutes les paires de lunettes folkloriques qu'elle a trouvées et la seconde a fait de même avec les chapeaux. Lorsqu'elles arrivent chez Maelle, celle-ci a rassemblé quelques perruques et elles sont toutes les trois prêtes pour une soirée inoubliable.

Charlotte commence par tester toutes les combinaisons possibles de chapeaux et de lunettes et Clémence prend une photo par combinaison, ce qui prend 7 secondes par cliché. En tout, les photos prennent 72 fois plus de temps que le comptage des chapeaux et des lunettes (le comptage prend seulement 1 seconde par pièce).

C'est ensuite Clémence qui teste toutes les combinaisons possibles de chapeaux et de perruques et Maelle prend une photo par combinaison, ce qui prend 5 secondes par cliché. Cette fois les photos prennent 24 fois plus de temps que le comptage des chapeaux et des perruques (1 seconde par pièce).

Et finalement, Maelle teste toutes les combinaisons possibles de lunettes et de perruques et Charlotte prend une photo par combinaison, ce qui prend 4 secondes par photo, ou encore 18 fois plus de temps que le comptage des lunettes et des perruques (1 seconde par pièce).

Combien y avait-il de chapeaux, de lunettes et de perruques ?

Solution proposée par Steve Tumson

$$\text{Soit :}\begin{cases} C = \text{ nombre de chapeaux} \\ L = \text{ nombre de lunettes} \\ P = \text{ nombre de perruques} \end{cases}$$

$$\text{Le système s'écrit : }\begin{cases} 7CL = 72(C+L) \\ 5CP = 24(C+P) \\ 4LP = 18(L+P) \end{cases}$$

$$\text{De la première et dernière ligne, on écrit :}\begin{cases} C = \dfrac{72L}{7L-72} \\ 5CP = 24(C+P) \\ P = \dfrac{18L}{4L-18} \end{cases}$$

En injectant cela dans la deuxième ligne, on trouve : $8L(L-18)=0 \Rightarrow L=18$

On trouve alors $C = 24$ et $P = 6$.

$$\boxed{\text{Il y a 24 chapeaux, 18 lunettes et 6 perruques.}}$$

Le 6 aout 2009